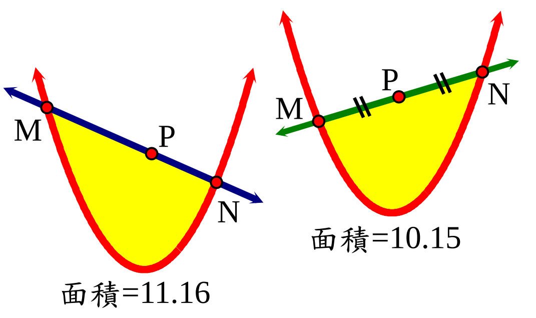
研究動機

在 2010 全國高中數學教學研討會中，有一個問題這樣問道:

給定平面上曲線 C 及定點 P，過 P 點作一直線 L，如何讓直線 L 與曲線 C 所圍出的封閉區域面積最小/最大呢?

經過實驗後，發現曲線 C 是圓錐曲線時，設直線 L 交曲線 C 於 M,N，面積最小值似乎都會發生在**點 P 為 $\overline{MN}$ 中點**時，這種直線稱作<u>等分截線</u>。**而對於其他曲線，是否等分截線都能圍出最小面積? 又如何圍出最大面積?** 基於這些問題，我決定做更深入的探究!



研究目的及名詞定義

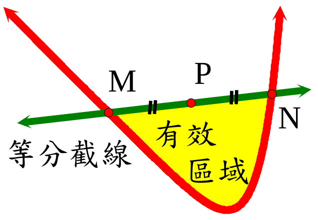
一、研究曲線類型: <u>1.圓錐曲線</u>　<u>2.凸曲線(非封閉及封閉)</u>　<u>3.一般化曲線</u>

二、研究內容: <u>1.等分截線的存在性及唯一性</u>　<u>2.有效區域面積極值發生的充要條件</u>　<u>3.有效區域面積的變化</u>

三、名詞定義及符號約定:

(一)**<u>伴 生 點:</u>** 曲線 C 上動點 M，稱 $\overleftrightarrow{PM}$ 與曲線 C 的交點 N 為點 M 的<u>伴生點</u>。

(二)**<u>等分截線:</u>** 若直線 L 與曲線 C 僅交於兩點 M, N，且點 P 為線段 $\overline{MN}$ 的中點時(使得 $\overline{PM}=\overline{PN}$)，則稱直線 L 為曲線 C 的<u>等分截線</u>。



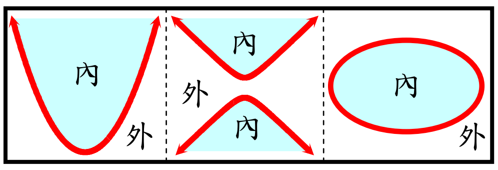
(三)**<u>有效區域:</u>** 若直線 L 與曲線 C 僅交於兩點 M, N，則稱 $\overline{MN}$ 與曲線 C 圍出的封閉區域為<u>有效區域</u>。

(四)若曲線 C 可表示為方程的形式，則直角坐標系中記為 $y=C(x)$，極坐標中記為 $r=C_{polar}(\theta)$。

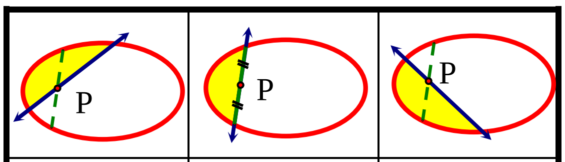
研究過程

一、圓錐曲線: (不失一般性，因為旋轉不影響圖形的長度和面積，將**非封閉曲線**旋轉成**<u>凹口向上</u>**的形式)

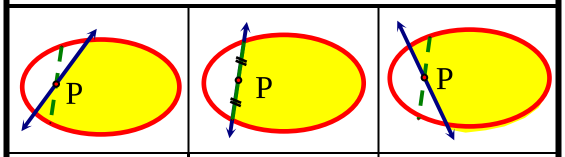
經由動態幾何軟體 Geogebra 模擬，發現 **P 點的位置影響到有效區域面積極值的發生條件**，約定曲線<u>**內部區域**</u>和<u>**外部區域**</u>如右表。



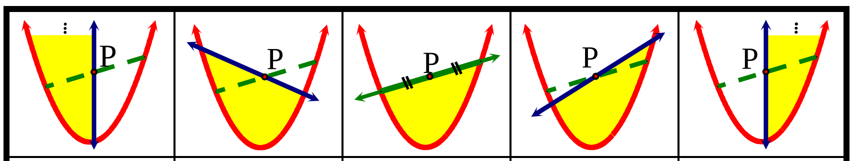
以下為**拋物線及橢圓**(雙曲線情況與拋物線類似)，當 P 點在曲線內時，<u>**有效區域面積的變化**</u>(隨直線 L 逆時針旋轉)的觀察結果:



38.62	**30.35(最小值)**	43.27



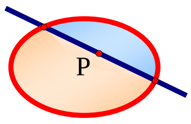
16.07	**16.37(最小值)**	17.34



$\to\infty$	11.16	**10.15**	10.55	$\to\infty$
無窮大	<u>嚴格遞減</u>	**最小值**	<u>嚴格遞增</u>	**無窮大**

我發現圓錐曲線的凸性似乎造成「**有效區域面積最小值發生在直線 L 為等分截線時**」，因此我猜想所有的凸曲線都具有這個性質，卻發現並非如此，以下著手研究**凸曲線**。

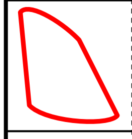
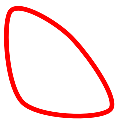
二、凸曲線:



※**封閉凸曲線**的有效區域**依目的選取**(需要較大(小)的有效區域就選擇較大(小)的一塊)

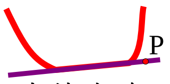
※**凸曲線**: 凸集合的邊界。(<u>凸集合 S</u> 滿足「對於 S 內任意兩點 A, B，$\overline{AB}$ 上的點(含 A, B)皆屬於 S」)

※**嚴格凸曲線**: 嚴格凸集合的邊界。(<u>嚴格凸集合 S</u> 滿足「對於 S 內任意兩點 A, B，$\overline{AB}$ 上的點(不含 A, B)皆屬於 S，但是都不在 S 的邊界上」)

	<u>凸曲線:</u> 容許部分是直的。
	<u>嚴格凸曲線:</u> 處處都是彎曲的。

※**支持直線**: 曲線 C 的**支持直線 L** 滿足曲線 C 位於直線 L 一側(可在直線 L 上)。

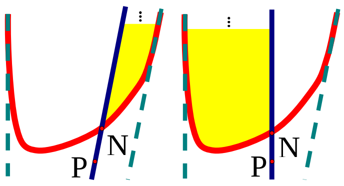
※**極限支持直線**: 曲線 C 的**極限支持直線 L** 滿足直線 L 和一支持直線的距離 →0，且直線 L 和曲線 C 有交點。



<u>支持直線</u>

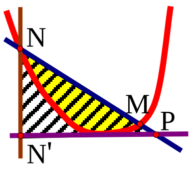
<u>(一)有效區域面積最大值的發生條件:</u>

> **當曲線 C 為非封閉凸曲線時:**
> 「**有效區域面積** $\to\infty$」$\Leftrightarrow$「**直線 L 的斜率** $m\to\lim_{x\to\infty}C'(x)$ **或** $m\to\lim_{x\to-\infty}C'(x)$」



(1)點 M(x,y)，當 $m\to\lim_{x\to\infty}C'(x)$，表示 $x\to\infty$，故 $y\to\infty$，有效區域面積 $\to\infty$
當 $m\to\lim_{x\to-\infty}C'(x)$，$x\to-\infty$，$y\to\infty$，有效區域面積 $\to\infty$，因此「⇒」成立

(2)假設 $m\to\lim_{x\to\pm\infty}C'(x)$ 不成立，過 P 支持直線交過 N 鉛直線於點 N'，則 $\overline{PN}$, $\overline{PN'}$ 有上界
故有效區域面積<△PNN'面積$=\frac{1}{2}\overline{PN}\cdot\overline{PN'}\cdot\sin\angle NPN'$ 有上界，因此「⇐」成立

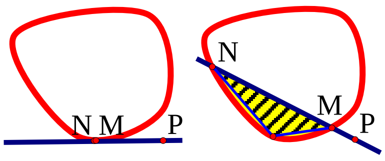


對於封閉凸曲線，**有效區域面積最大值及最小值同時發生**，於下文討論。

<u>(二)有效區域面積最小值的發生條件:</u>

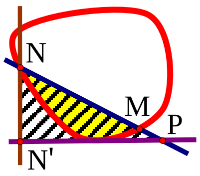
1.當 P 點在曲線 C 上或外部:

> **當曲線 C 為凸曲線時，對於曲線 C 上或外部的點 P:**
> 「**有效區域面積→0**」⇔「**直線 L 為曲線 C 的極限支持直線**」



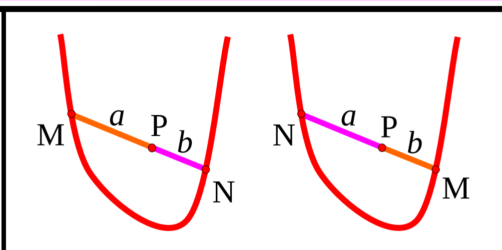
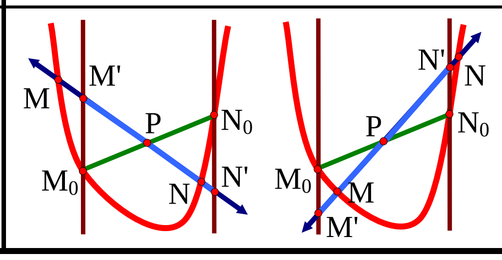
(1)反設直線 L 非極限支持曲線，於 $\widehat{MN}$ 取一點 T，則 $\overline{MN}$, $\overline{MT}$, ∠NMT 皆非正無窮小量
有效區域面積>△AMT 面積$=\frac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{MT}\cdot\sin\angle NMT$，非正無窮小量，因此「⇒」成立

(2)設 N 在 M 左邊，設過 P 支持直線交過 N 鉛直線於點 N'，此時 $\overline{PN}$, $\overline{PN'}\to 0$
有效區域面積<△PNN'面積$=\frac{1}{2}\overline{PN}\cdot\overline{PN'}\cdot\sin\angle NPN'\to 0$，因此「⇐」成立



2.當 P 點在曲線 C 內部－**非封閉凸曲線**

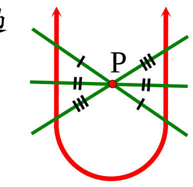
「曲線 C 為非封閉嚴格凸曲線」⇒「對於曲線 C 內任意 P 點，過 P 點等分截線存在且唯一」

存在性		考慮曲線 C 上動點 M 及其伴生點 N (1)當點 M, N 位於左圖的位置時: $\overline{PM}>\overline{PN}$ (2)當點 M 移動到點 N (交換位置)時: $\overline{PM}<\overline{PN}$ 而 $\overline{PM}$, $\overline{PN}$ 的變動是連續的，因此在 M 點移動到點 N 的過程中，存在 M 點使得 $\overline{PM}=\overline{PN}$
唯一性		已知存在等分截線 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$，不失一般性，令 M 在 N 左側，過 M_0, N_0 作鉛直線分別交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於 M', N' (1)當 M 在 M_0 左方(左圖): $\overline{PM}>\overline{PM'}=\overline{PN'}>\overline{PN}$ (2)當 M 在 M_0 右方(右圖): $\overline{PM}<\overline{PM'}=\overline{PN'}<\overline{PN}$ 因此若 M 點非 M_0，$\overline{PM}\neq\overline{PN}$，故等分截線唯一

※此定理的逆定理不成立

※此定理條件是嚴格凸曲線，因為有些凸曲線並沒有這個性質，例如:

圖為兩射線加上一半圓形成的凸曲線，對於對稱軸上的點 P，過 P 點等分截線有無限多條。



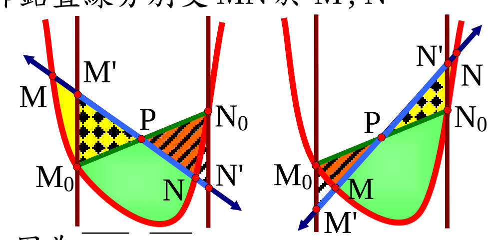
當曲線 C 為非封閉凸曲線時，對於曲線 C 內任意 P 點:「有效區域面積發生最小值」⇔「直線 L 為等分截線」

已知存在唯一過 P 點等分截線 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$，考慮曲線 C 上動點 M 及其伴生點 N，過 M_0, N_0 作鉛直線分別交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於 M', N'

可觀察到: 黃色區域面積>格紋三角形面積=斜線三角形面積>橘色區域面積

故 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍有效區域=黃色區域+綠色區域>橘色區域+綠色區域=$\overleftrightarrow{M_0N_0}$ 所圍有效區域

而因為 M 為曲線 C 上任意點，因此只有等分截線能圍出有效區域面積最小值，得證

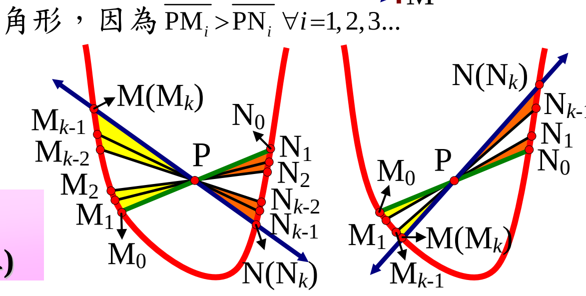


※黃色與橘色區域面積之比較: (舉點 M 在點 M_0 左方的情形為例，右下左圖)

將兩區域分割成 k 個相同張角 $d\theta$ 的曲邊三角形，當 $k\to\infty\Rightarrow d\theta\to 0$，皆可視為三角形，因為 $\overline{PM_i}>\overline{PN_i}$ $\forall i=1,2,3\ldots$

故 $\triangle PM_{i-1}M_i$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{PM_{i-1}}\cdot\overline{PM_i}\cdot\sin d\theta>\frac{1}{2}\overline{PN_{i-1}}\cdot\overline{PN_i}\cdot\sin d\theta=\triangle PN_{i-1}N_i$ 面積 $\forall i=0,1,2\ldots$

因此，黃色區域面積 $=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k}\Delta PM_iM_{i+1}>\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k}\Delta PN_iN_{i+1}=$ 橘色區域面積

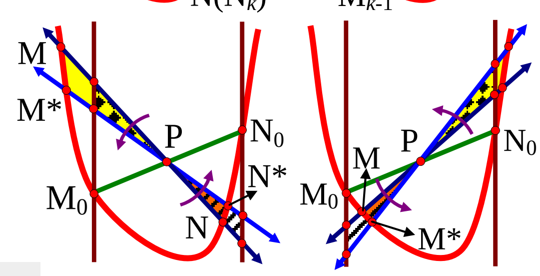


當曲線 C 為非封閉凸曲線時，對於曲線 C 內部 P 點，隨直線 L 逆時針旋轉有效區域面積呈「∞→嚴格遞減→最小值→嚴格遞增→∞」變化(研究結論二)

當動點 M 在點 M_0 左方，若點 M 向點 M_0 靠近到點 M*(隨直線 L 逆時針旋轉)

觀察得: 黃色區域面積>格紋三角形面積=斜線三角形面積>橘色區域面積(如右圖左)

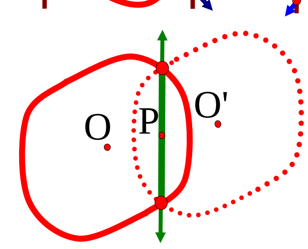
因此，有效區域面積嚴格遞減，而當點 M 在點 M_0 右方時，有效區域面積嚴格遞增



3.當 P 點在曲線 C 內部－**封閉點對稱凸曲線**

對於封閉凸曲線，我發現**等分截線不一定擁有唯一性**，首先提出一個引理:

當曲線 C 為封閉曲線時:
「曲線 C 為點對稱嚴格凸曲線」⇔「對於曲線 C 內任意 P 點，曲線 C 與曲線 C' 恰交於兩點或完全重合(曲線 C'是曲線 C 以 P 點為中心旋轉 180°所得)」



每對交點決定一條等分截線!

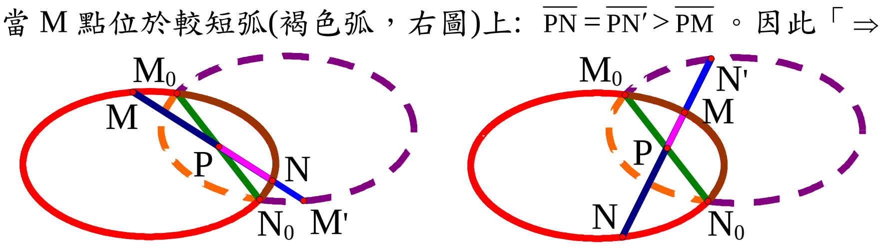
當曲線 C 為封閉曲線時:「曲線 C 為點對稱嚴格凸曲線」⇔「對於曲線 C 內任意非點對稱中心的 P 點，過 P 點等分截線存在且唯一」

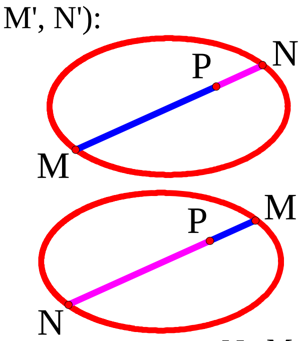
(1)①存在性: 考慮曲線 C 上動點 M 與其伴生點 N，由於連續性，在右側兩圖之間，存在 M 點使得 $\overline{PM}=\overline{PN}$

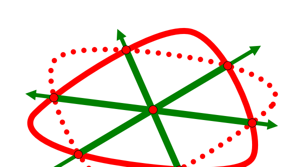
②唯一性: 將橢圓 C **以 P 點為中心旋轉 180°**得橢圓 C'(點 M, N 分別對應點 M', N'):

A.當 M 點位於較長弧(紅色弧，左圖)上: $\overline{PN}<\overline{PM'}=\overline{PM}$

B.當 M 點位於較短弧(褐色弧，右圖)上: $\overline{PN}=\overline{PN'}>\overline{PM}$。因此「⇒」成立





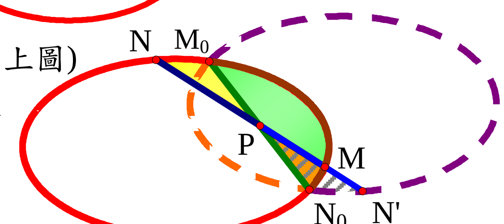


等分截線不唯一

(2)設封閉曲線 C 非點對稱嚴格凸曲線，則存在 P 點使得曲線 C 與 C'交至少 4 點(如右上圖)

每對交點關於 P 點對稱，決定一條等分截線，故等分截線不唯一，因此「⇐」成立

當曲線 C 為封閉點對稱曲線時，對於曲線 C 內部的點 P:「有效區域面積發生最大值或最小值」⇔「直線 L 為等分截線」



(1)當 P 點為點對稱中心時: 任意過 P 點直線皆為等分截線，命題成立

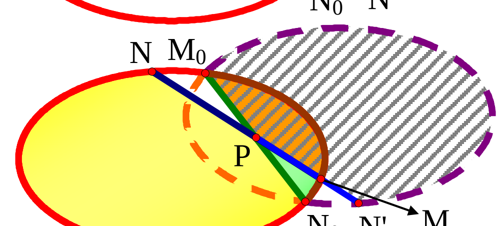
(2)當 P 點非點對稱中心時: 考慮曲線 C 上動點 M 及其伴生點 N

不失一般性，令較短弧上的是點 M，將橢圓 C **以 P 點為中心旋轉 180°**得橢圓 C'

知兩橢圓僅交於兩點 M_0, N_0，觀察得: 黃色區域面積=斜線區域面積>橘色區域面積

故 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍有效區域=黃色區域+綠色區域>橘色區域+綠色區域=$\overleftrightarrow{M_0N_0}$ 所圍有效區域

而因為 M 為曲線 C 上任意點，因此只有等分截線能圍出有效區域面積最小值，得證



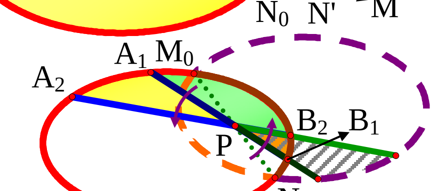
當曲線 C 為封閉點對稱曲線時，對於曲線 C 內部 P 點，隨直線 L 逆時針旋轉有效區域面積呈「最小值→嚴格遞增→最大值→嚴格遞減」變化(研究結論三)

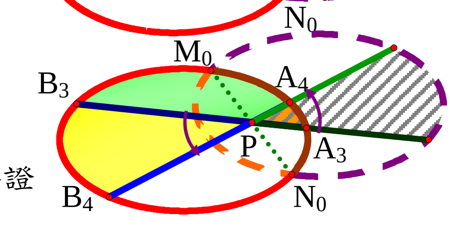
當 M 點從點 M_0 移動到點 N_0: 考慮 M 點從點 A_1 移動到點 A_2(隨直線 L 逆時針旋轉)

可觀察到: 黃色區域面積=斜線區域面積>橘色區域面積(嚴謹證明與上文相似)

故 $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ 所圍有效區域=黃色區域+綠色區域>橘色區域+綠色區域=$\overleftrightarrow{A_2B_2}$ 所圍有效區域

故有效區域面積嚴格遞增，而 M 點從點 N_0 移動到點 M_0 時，有效區域面積嚴格遞減，得證

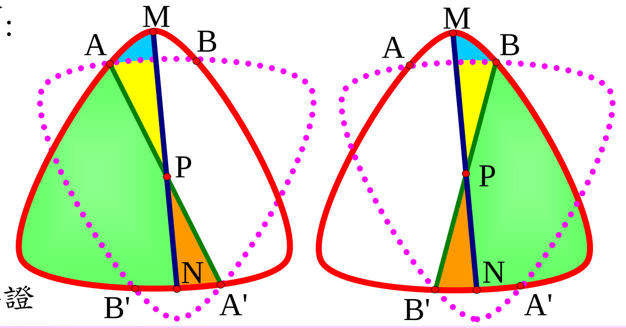




當曲線 C 為封閉凸曲線時，若 P 點位於曲線 C 內部:

「有效區域面積發生極大值或極小值」⇔「直線 L 為等分截線」

將曲線 C 以 P 點為中心旋轉 180°成為 C'，則可能有數對交點，決定數條等分截線，記當中所圍最小有效區域面積為 $\overline{A}$，考慮過 P 點非等分截線的直線 $\overleftrightarrow{PM}$：
黃色和橘色區域關於 P 點對稱，面積相等
故 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍面積(左)=黃色區域+綠色區域+藍色區域
>橘色區域+綠色區域= $\overleftrightarrow{AA'}$ 所圍面積(左)
同理，$\overleftrightarrow{MN}$ 所圍面積(右)> $\overleftrightarrow{BB'}$ 所圍面積(右)
因此當直線 L 為等分截線時，有效區域面積有極小值
若選取另一有效區域，則有效區域有面積有最大值，得證



當曲線 C 為封閉凸曲線時，對於曲線 C 內部 P 點，隨直線 L 逆時針旋轉: (研究結論四)

有效區域面積呈「極小值→嚴格遞增→極大值→嚴格遞減→...→極大值→嚴格遞減」循環

隨直線 L 逆時針旋轉，當直線 L 為等分截線時發生有效區域面積極值，其餘時刻呈嚴格遞增或遞減

三、一般化曲線:

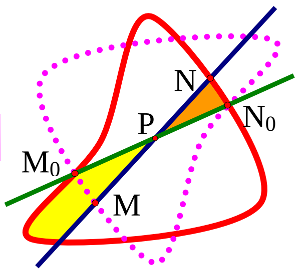
接著，我改變討論的方式: **給定 P 點**，找出具有「**等分截線圍出最小面積**」性質的曲線 C。
(以下討論在**極座標**中進行，給定 P 點後，令 P 點為極點，並假設曲線 C 的函數型式為 $r=C_{polar}(\theta)$)

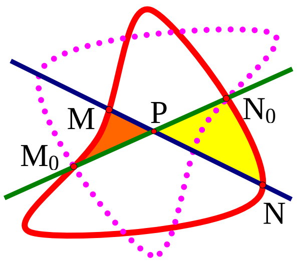
「$C_{polar}(\theta)$ 為顯函數且 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 只有兩組解(θ_0 及 $\theta_0+\pi$)」⇔「過 P 點等分截線存在且唯一」

(1)易知 $C_{polar}(\theta+\pi)$ 為曲線 C 以極點(P 點)為中心旋轉 180°形成的曲線 C'
而 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 只有兩組解(θ_0 及 $\theta_0+\pi$)，表示曲線 C 和曲線 C'只有兩個交點(解即為交點)
故等分截線唯一(每對交點決定一條等分截線，而其餘直線不可能為等分截線)，因此「⇒」成立
(2)假設 $C_{polar}(\theta)$ 非顯函數，則可能發生有效區域不唯一的情形，不予討論
假設 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 不只兩組解，則等分截線不唯一。因此「⇐」成立

「$C_{polar}(\theta)$ 為顯函數」⇒「『有效區域面積有極值』⇔『直線 L 為等分截線』」

由於 $C_{polar}(\theta)$ 為顯函數，表示從 P 點開始的射線都只交曲線 C 於一點
故過 P 點直線都交曲線 C 於兩點，考慮曲線 C 上動點 M 及其伴生點 N
則隨直線 L 從一等分截線轉動到另一等分截線時: $\overline{PM}$ 及 $\overline{PN}$ 的大小關係不會改變
故 $\overline{PM}$ 恆大(小)於 $\overline{PN}$，由上文的切割比較面積法得黃色區域面積>橘色區域面積
故直線 L 從等分截線逆時針或順時針轉動時，有效區域面積會同時減少或增加
因此，有效區域面積極值只會發生直線 L 為等分截線時

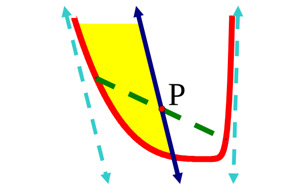
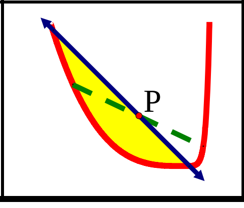
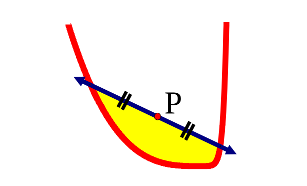
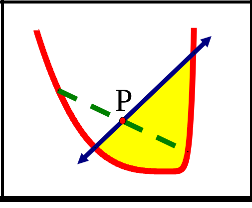
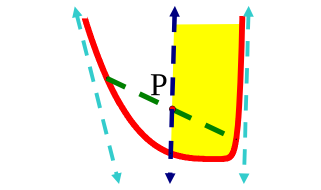




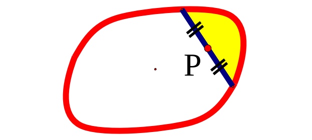
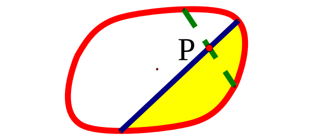
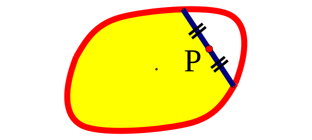
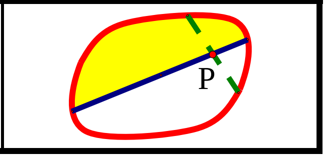
研究結論

一、**對於凸曲線及其內部點 P: 有效區域面積產生極值⇔直線 L 為等分截線**

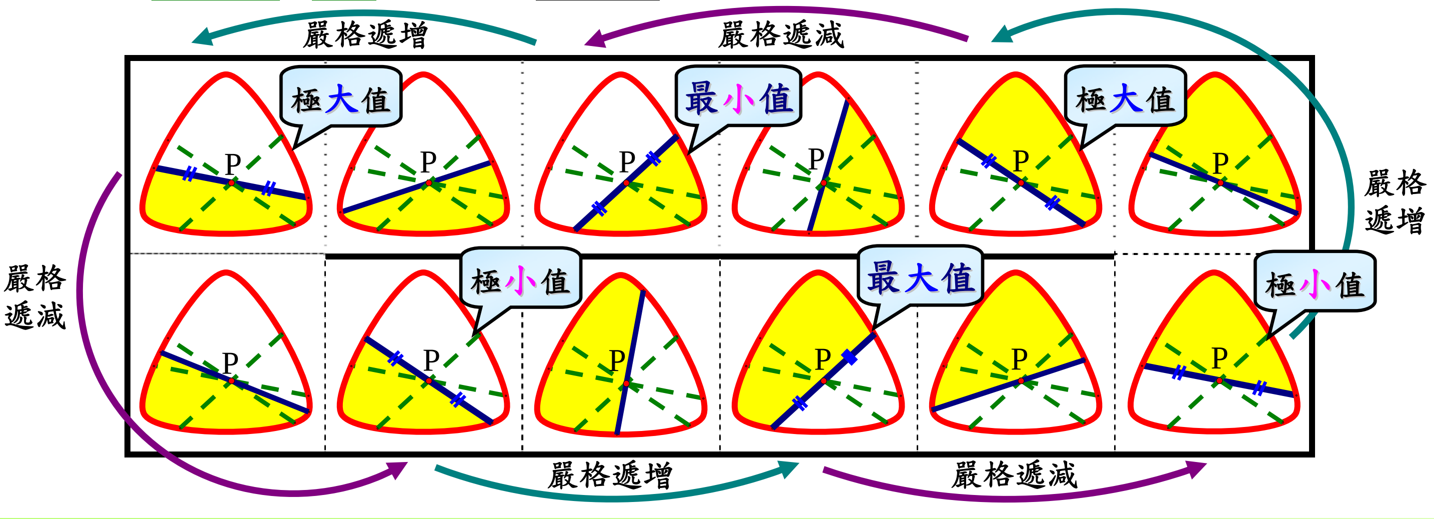
二、**對於非封閉凸曲線及其內部點 P，隨直線 L 逆時針旋轉，有效區域面積呈以下變化:**

無窮大($m\to\lim\limits_{x\to\infty}C'(x)$) →	嚴格遞減 →	最小值(等分截線) →	嚴格遞增 →	無窮大($m\to\lim\limits_{x\to-\infty}C'(x)$)
				

三、**對於封閉點對稱凸曲線及其內部點 P，隨直線 L 逆時針旋轉，有效區域面積呈以下變化:**

最小值(等分截線) →	嚴格遞增 →	最大值(等分截線) →	嚴格遞減
			

四、**對於封閉非點對稱或非凸的曲線及其內部點 P，隨直線 L 逆時針旋轉，有效區域面積呈以下變化:**



參考資料

一、林政毅。函數圖形與直線所圍成面積之最小值問題。MTS 2010(南區)研習手冊。2010
二、方逵、姚杰。2006。平面參數曲線的凸性分析。長沙大學學報。第 20 卷第 2 期。頁 58-61