中華民國第 51 屆中小學科學展覽會
作品說明書

點 • 線 • 面
—過定點之直線與曲線所圍面積極值之探討

董皓文

編號: 040403

關鍵詞: 凸曲線、面積極值、中點弦

目錄

摘要

本文以幾何的方式研究過定點直線與曲線所圍區域面積的極值，研究的問題如下:

給定 P 點及曲線 C，所有**過 P 點的直線**中，試問哪一條能**和曲線 C 圍出最小/最大的面積**呢?

經過數學軟體實驗後，我發現有一種直線似乎擁有這個性質，並稱這樣的直線為**等分截線**，其特性是: 等分截線 L_0 僅交曲線 C 於兩點 M, N，且 $\overline{PM}=\overline{PN}$。因此我猜測**等分截線能和曲線 C 圍出最小的面積**，並發現有效區域面積隨直線的旋轉(以 P 點為中心)呈現規則地變化。

本研究主要的結果如下:

1.圓錐曲線滿足這個性質

2.延伸推廣至**所有凸曲線**都滿足這個性質(無論曲線平滑與否)

3.當給定 P 點，提出簡易判斷曲線 C 與 P 點間是否具有這個性質的條件

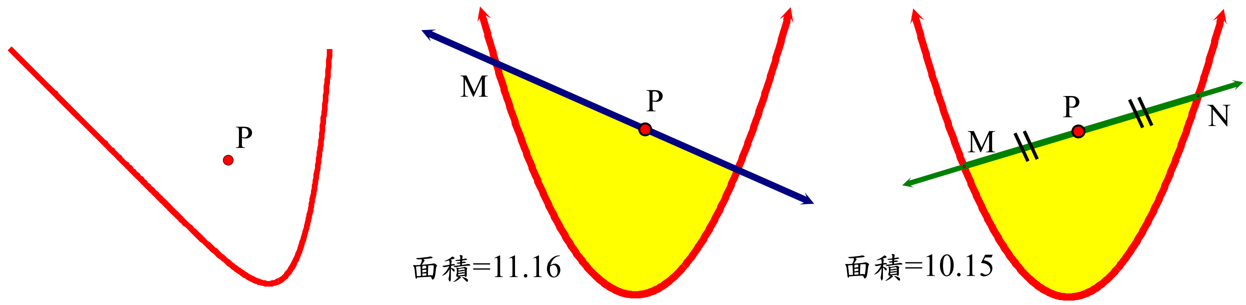
4.針對有範圍限制的曲線，提出圍出最大或最小區域面積直線之做法。

本文內容力求簡單、扼要但不失嚴謹性，希望呈現出數學簡單但深刻的美。

壹、研究動機

給定曲線 C 及定點 P，過 P 點作一直線 L，什麼時候**直線 L 與曲線 C 所圍出的封閉區域面積有最小值**(如下左圖黃色區域，稱作有效區域)呢? 什麼時候又會有**最大值**呢? 經過實驗後，我發現當曲線 C 為拋物線時，如果直線 L 交曲線 C 於 M, N，面積最小值似乎都會發生在 **P 為 $\overline{MN}$ 中點**(如下右圖)時，該直線稱作等分截線。而對於**其他曲線 C，是否等分截線都能圍出最小的有效區域呢? 又如何圍出面積最大的有效區域呢?** 這些問題激起了我對真理的好奇，從此展開了我的研究之旅。

本報告與高中課程相關的部分為「多項式微積分」、「圓錐曲線」及「指數與對數」。



貳、研究目的

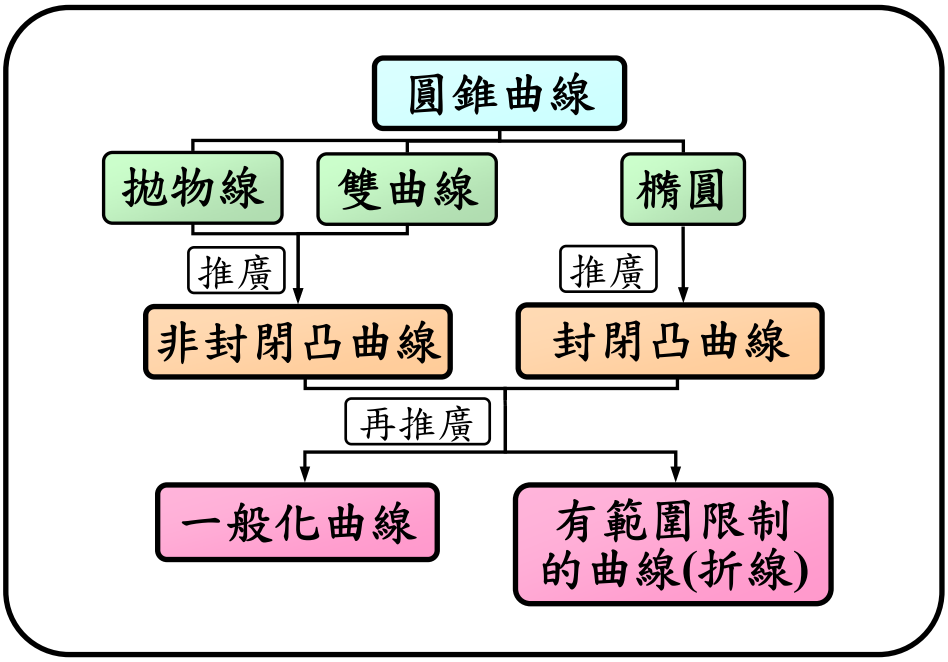
本研究針對各種曲線探究「**發生有效區域面積極值的充要條件**」:

一、研究曲線類型:

1.圓錐曲線(拋物線,雙曲線,橢圓)
2.非封閉凸曲線
3.封閉凸曲線
4.一般化曲線
5.有範圍限制的曲線

二、研究內容:

1.有效區域的存在性
2.等分截線的存在性及唯一性
3.有效區域面積極值發生的充要條件
4.有效區域面積的變化



研究流程圖

參、研究過程

一、名詞定義及符號約定:

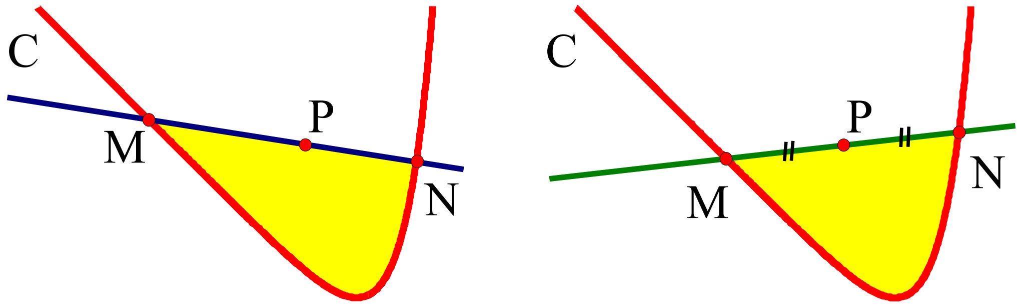
(一)名詞定義

本研究運用到了許多<u>數學專有名詞</u>及<u>新定義的名詞</u>，在此定義最基本的幾個，其餘定義於後文再加以說明: (本研究所有名詞定義可參見附錄 1)

1.**<u>伴生點</u>**: 給定曲線 C 上點 M，作 $\overleftrightarrow{PM}$ 與曲線 C 的交點 N，則稱 N 為 M 的<u>伴生點</u>。

2.**<u>等分截線</u>**: 若直線 L 滿足: 直線 L 與曲線 C 僅交於兩點 M, N，且點 P 為線段 $\overline{MN}$ 的中點時(此時 P 在 $\overline{MN}$ 上),則稱直線 L 為曲線 C 的<u>等分截線</u>(如下圖綠色直線)。

3.**<u>有效區域</u>**: 若直線 L 與曲線 C 僅交於兩點 M, N，則稱 $\overline{MN}$ 與曲線 C 圍成的封閉區域為<u>有效區域</u>(如下圖黃色區域)。



(二)符號約定

1.定點 P，曲線 C(若曲線 C 可表為方程的形式，直角坐標: $y=\mathrm{C}(x)$ /極坐標: $r=\mathrm{C}_{polar}(\theta)$)。

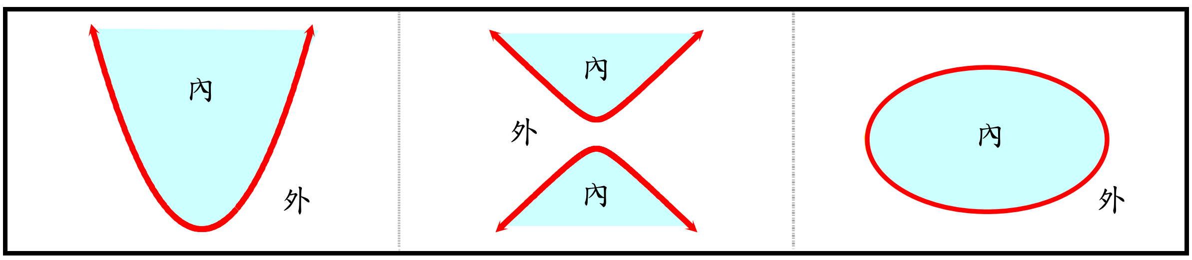
2.動點 M 與其伴生點 N，直線 $\overleftrightarrow{PM}$ (同 $\overleftrightarrow{PN}$, $\overleftrightarrow{MN}$)記為直線 L(深藍色)，其斜率記為 m。

3.若過 P 點等分截線存在且唯一，則記為 L_0(綠色)，並記 L_0 與曲線 C 交點為 M_0, N_0 。

二、圓錐曲線

由於圓錐曲線是這個問題最原始的出發點，而圓錐曲線也屬於現行高中課程的一環，因此我決定從**<u>圓錐曲線</u>**開始討論:

經由動態幾何軟題 Geogebra 的模擬，我發現 **P 點的位置影響到有效區域面積極值發生的條件**，因此我先約定圓錐曲線**<u>內部區域</u>**和**<u>外部區域</u>**的界定:

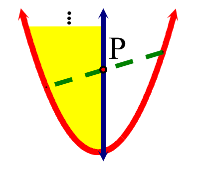
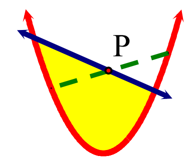
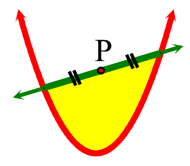
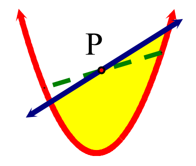
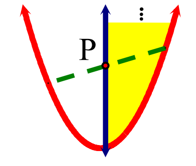


其中，不失一般性，因為平移、旋轉都是保距變換，所以並不會改變長度和面積，因此對於**<u>非封閉的曲線</u>**，我都先將其旋轉成**<u>凹口向上</u>**的形式，方便後續討論。

我發現<u>有效區域面積的變化</u>都是有規律的，以下分別展示各式**圓錐曲線**(拋物線,雙曲線,橢圓)的觀察結果:

(一)當曲線 C 為<u>拋物線</u>時: (記直線 L 斜率 m) (此拋物線為開口向上型)

<u>**有效區域面積變化:**</u> (由左至右，直線 L 逆時針旋轉)

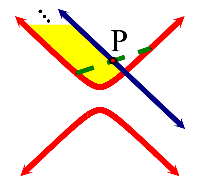
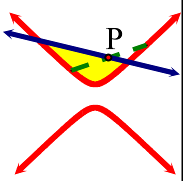
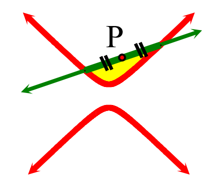
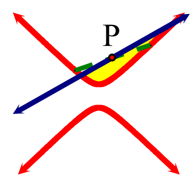
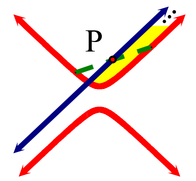
	…		…		…		…	
∞	…	11.16	…	**10.15**	…	10.55	…	∞
無窮大	→	<u>嚴格遞減</u>	→	**最小值**	→	<u>嚴格遞增</u>	→	**無窮大**

<u>**猜測結果:**</u>

	有效面積最小值(發生條件)	有效面積最大值(發生條件)
P 點位於拋物線上或外部	**有效區域面積最小值→0 (L 為切線)**	**有效區域面積最大值→∞ (當 $m\to\infty \vee -\infty$)**
P 點位於拋物線內部	**有效區域面積有最小值 (L 為等分截線)**	

(二)當曲線 C 為雙曲線時: (記直線 L 斜率為 m，兩條漸近線的斜率為 $m_1, m_2 (m_1 < m_2)$)

<u>**有效區域面積變化:**</u> (由左至右，直線 L 逆時針旋轉)

	…		…		…		…	
∞	…	11.16	…	**10.15**	…	10.55	…	∞
無窮大	→	<u>嚴格遞減</u>	→	**最小值**	→	<u>嚴格遞增</u>	→	**無窮大**

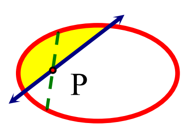
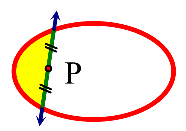
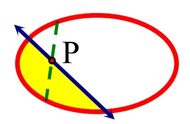
<u>**猜測結果:**</u>

	有效面積最小值(發生條件)	有效面積最大值(發生條件)
P 點位於雙曲線上或外部	**有效區域面積最小值→0 (L 為切線)**	**有效區域面積最大值→∞ (當 $m\to m_1^+ \vee m_2^-$)**
P 點位於雙曲線內部	**有效區域面積有最小值 (L 為等分截線)**	

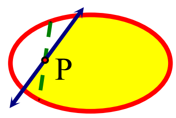
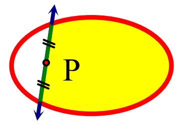
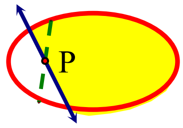
(三)當曲線 C 為橢圓時:

<u>**有效區域面積變化:**</u> (由左至右，直線 L 逆時針旋轉)

1.有效區域選擇較小者

	…		…	
38.6	…	**30.3(最小值)**	…	43.2

2.有效區域選擇較大者

	…		…	
16.07	…	**16.37(最小值)**	…	17.34

猜測結果:

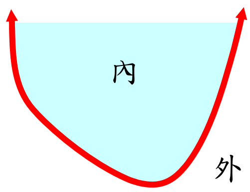
	有效面積最小值(發生條件)	有效面積最大值(發生條件)
P 在橢圓上或橢圓外部	**有效區域面積最小值→0 (L 為切線)**	**有效區域面積最大值→橢圓面積 (L 為切線)**
P 點位於橢圓內部	**有效區域面積有最小值 (L 為等分截線)**	**有效區域面積有最大值 (L 為等分截線)**

三、凸曲線

(一)前言

1.定義

根據圓錐曲線的實驗及觀察，我發現「**等分截線圍出有效區域面積最小值**」這個性質似乎是源自圓錐曲線的**凸性**(*convexity*)，所以接下來討論**凸曲線**的情形，右圖為其內部區域及外部區域的界定。



然而，我發現單純的凸曲線並沒有太多性質，因此我定義了一個新名詞—「**嚴格凸曲線**」，並得到了更佳的結果。以下為兩者定義:

●**凸曲線**: (*convex curve*)

幾何定義: 若曲線 C 滿足: 曲線 C 上任意 P 點，過 P 點有曲線 C 的切線 L，則曲線 C **完全位於 L 的同一側**(可在 L 上)，則曲線 C 稱**凸曲線**。

點集拓撲定義: 若集合 S 滿足「$\forall A,B\in S\ \forall\lambda\in[0,1]\quad \lambda A+(1-\lambda)B\in S$」(此類集合稱**凸集合**)，則集合 S 的邊界稱**凸曲線**。

※其中 S 亦可為無界點集，例如: 拋物線為無界點集 $\{(x,y)|y\geq x^2\}$ 的邊界，亦為 $\{(x,y)|y\leq x^2\}$, $\{(x,y)|y<x^2\}$, $\{(x,y)|y>x^2\}$ 的邊界。只要存在凸集合的邊界為曲線 C，曲線 C 就是凸曲線。

●**嚴格凸曲線**:

幾何定義: 若曲線 C 滿足: 曲線 C 上任意 P 點，過 P 點有曲線 C 的切線 L，則曲線 C **完全位於 L 的同一側**(除了 P 點，其餘點皆不可在 L 上)，則曲線 C 稱**嚴格凸曲線**。

點集拓撲定義: 若集合 S 滿足「$\forall A,B\in S\ \forall\lambda\in(0,1)\quad \lambda A+(1-\lambda)B\in S-\partial S$」($\partial S$ 為 S 的邊界)，則集合 S 的邊界稱**嚴格凸曲線**。

首先，我希望討論「**只會圍出一個有效區域**」的曲線，經過實驗後，我發現到:

引理 1

「曲線 C 為凸曲線」 ⇔ 「任意直線交曲線 C 於至多兩點或交於一線段」

Proof:

(1)假設直線 L 與曲線 C 交於三點 P, Q, R(如右圖左)，而曲線 C 為凸集合 S 的邊界

根據凸曲線的定義: $\forall A,B\in S\ \forall\lambda\in[0,1]\quad \lambda A+(1-\lambda)B\in S$

考慮 PR 兩點，知 $\overline{PR}$ 完全包含在集合 S 中

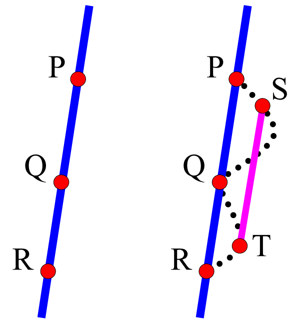
故 $\overset{\frown}{PQ}$ 及 $\overset{\frown}{QR}$ (在曲線 C 上)會位在直線 L 同側(如右圖右)

若於 $\overset{\frown}{PQ}$ 上取一點 X，$\overset{\frown}{QR}$ 上取一點 Y

則 $\overline{XY}$ 上存在點 T，使得 $T\notin S$ ，與凸集合定義矛盾

因此，P, Q, R 共線(即直線 L 與曲線 C 交於一線段 $\overline{PR}$)

或者直線 L 與曲線 C 只交於兩點，故「⇒」成立



(2)假設曲線 C 非凸曲線，則「 $\forall A,B\in S\ \forall\lambda\in[0,1]\quad \lambda A+(1-\lambda)B\in S$ 」不成立

故「 $\exists A,B\in S\ \exists C\in\overline{AB}\quad C\notin S$ 」，意即在 $\overline{AB}$ 上有一點 Q 在集合 S 外

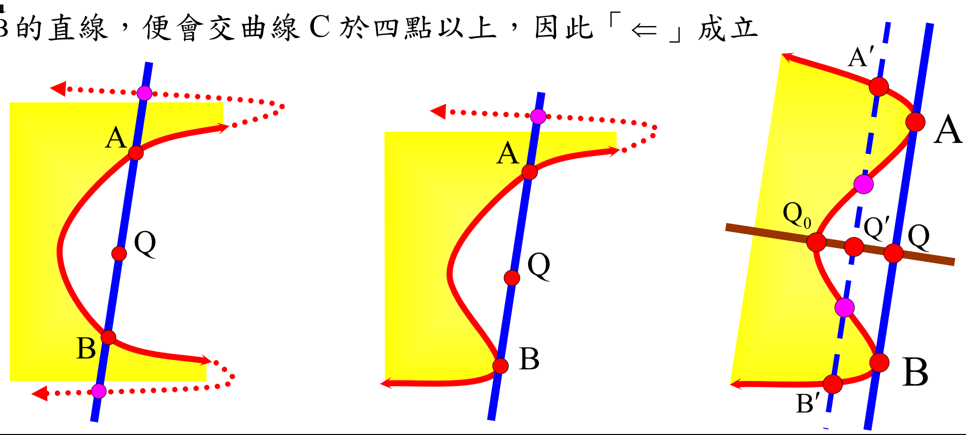
已知 A, B 都在曲線 C 上，故 $\overline{AB}$ 交直線於至少兩點:

如果 $\overline{AB}$ 交直線於超過兩點: 與前提矛盾，命題成立

如果 $\overline{AB}$ 交直線於兩點: 不失一般性，令 $\overset{\frown}{AB}$ 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 左側

則曲線可能形狀如以下三圖所示，分別討論之:

- 左: 因為集合 S 不包含 Q，故邊界會如圖中粉紅線般交直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 於另兩點
- 中: 因為集合 S 不包含 Q，故邊界會如圖中粉紅線般交直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 於另一點
- 右: 因為集合 S 不包含 Q，過 C 做 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂線交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 Q_0，於 $\overline{QQ_0}$ 上取點 Q'，過點 Q' 作平行 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線，便會交曲線 C 於四點以上，因此「⇐」成立



<u>**引理 2**</u>

當曲線 C 是非封閉曲線時:

「曲線 C 為凸曲線」 ⇔ 「任意直線 L 若可圍出有效區域，則有效區域唯一」

Proof:

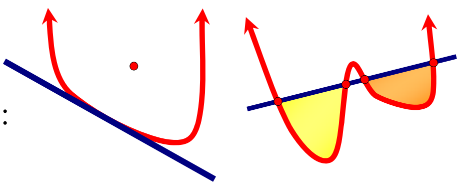
(1)因為曲線 C 是凸曲線，由引理 1 知「任意直線交曲線 C 於至多兩點或交於一線段」

a.若直線 L 與曲線 C 交於一線段(如右圖左):

直線 L 和曲線 C 不可能圍出有效區域

b.若直線 L 與曲線 C 有至多兩個的交點(如右圖右):

欲圍出兩個有效區域，交點必須多於兩個，矛盾



因此，若有效區域存在，則有效區域唯一，故「⇒」成立

(2)若「任意直線 L 若圍出有效區域，則有效區域唯一」成立

表示「任意直線交曲線 C 於至多兩點或交於一線段」(因為兩交點決定一有效區域)

因此，由引理 1 知曲線 C 為凸曲線，故「⇐」成立

引理 3

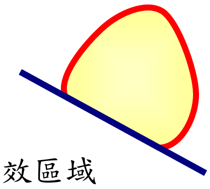
當曲線 C 為封閉曲線時:

「曲線 C 為凸曲線」 ⇔ 「任意直線 L 若可圍出有效區域，則有效區域至多兩個，且所有有效區域之聯集為曲線 C 的內部區域」

Proof:

(1)因為曲線 C 是凸曲線，由引理 1 知「任意直線交曲線 C 於至多兩點或交於一線段」

A.若直線 L 與曲線 C 交於一線段(如右圖):

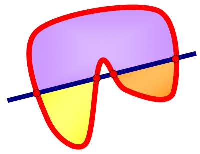


直線 L 和曲線 C 只能圍出一個有效區域(即曲線 C 的內部區域)

B.若直線 L 與曲線 C 有至多兩個的交點:

若可圍出一個有效區域 S，則 C_{in}(曲線 C 的內部區域) - S 亦為一有效區域

且滿足兩者聯集 $S\cup(C_{in}-S)=C_{in}$



而如果要圍出第三個有區域，那交點必須多於兩個，矛盾

因此，若有效區域存在，則有效區域唯一，故「⇒」成立

(2)若「任意直線 L 若圍出有效區域，則有效區域至多有兩個，且所有有效區域之聯集為曲線 C 的內部區域」成立，則有以下兩種情形:

A.存在一個有效區域:

因另一有效區域不存在，故 $C_{in}-S=\varnothing$，得 $C_{in}=S$，即有效區域就是曲線 C 內部區域

故直線 L 和曲線 C 交於一點或一線段(在集合 S 的邊界(曲線 C)上)

B.存在兩個有效區域:

因為只圍出兩個有效區域，故交點最多有兩個

整理以上兩點，表示「任意直線交曲線 C 於至多兩點或交於一線段」

因此，由引理 1 知曲線 C 為凸曲線，故「⇐」成立

由於<u>**凸曲線**</u>具有以上許多良好的性質，所以我先討論凸曲線，再嘗試推廣到<u>**一般化曲線**</u>。

2.有效區域面積最大值－非封閉凸曲線

我決定先討論<u>有效區域面積的最大值</u>，發現依照**封閉與否**將曲線進行分類，分別可以得到不相同的結果。針對**非封閉凸曲線**，我得到以下結果:

定理 1

當曲線 C 為非封閉凸曲線時: (曲線 C 方程型式為 $y=C(x)$)

「有效區域面積 → ∞」 ⇔ 「直線 L 的斜率 $m\to\lim_{x\to\infty}C'(x)$ 或 $m\to\lim_{x\to-\infty}C'(x)$」

Proof:

考慮曲線 C 上動點 M 及其伴生點 N，設 M 點為(x,y)，並設 $\overleftrightarrow{PM}$ (直線 L)斜率為 m

(1)因為 M 點位於曲線 C 上，而曲線 C 是非封閉的凸曲線

當 $m\to\lim_{x\to\infty}C'(x)$ (P 點固定)，表示 $x\to\infty$ (M 點在無窮遠處)，故 $y\to\infty$，有效區域面積 $\to\infty$

當 $x\to-\infty$ 時，$y\to\infty$，故有效區域面積 $\to\infty$，並且 $m\to\lim_{x\to-\infty}C'(x)$ (P 點固定)

因此，直線 L 的斜率 $m\to\lim_{x\to\infty}C'(x)$ 或 $m\to\lim_{x\to-\infty}C'(x)$ ⇒ 有效區域面積 → ∞

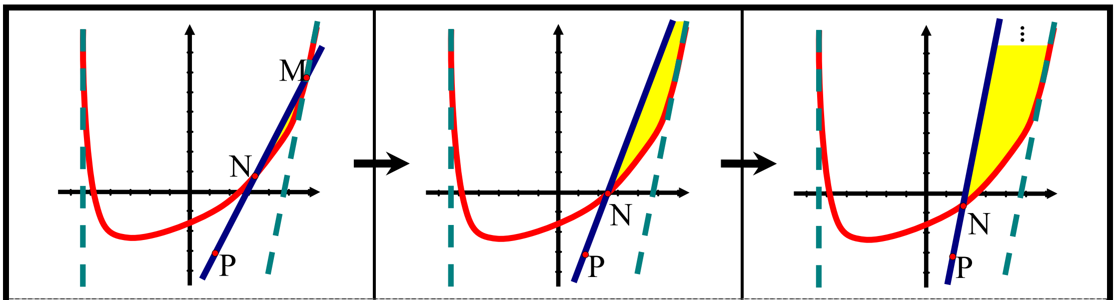
(2)反設[$m\to\lim_{x\to\infty}C'(x)$ 或 $m\to\lim_{x\to-\infty}C'(x)$]不成立

則 M 點的坐標都會是有限值，即 x,y 有限，故有效區域面積亦為有限值

因此，有效區域面積 → ∞ ⇒ 直線 L 的斜率 $m\to\lim_{x\to\infty}C'(x)$ 或 $m\to\lim_{x\to-\infty}C'(x)$

說明及圖形:

舉例: 當 $m \to \lim_{x\to\infty} C'(x)$，意即 M 點不斷向右移動，有效面積最後會趨向無窮大



有效區域面積= 1.55	有效區域面積= 10.72	有效區域面積 →∞

3.有效區域面積最大值—封閉凸曲線

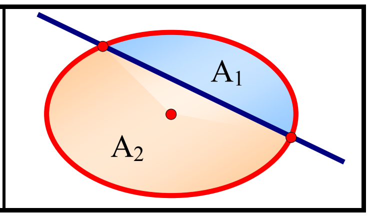
對於**封閉曲線**，我遇到以下問題: 直線 L 與封閉曲線所圍出的區域該如何定義呢?

本研究使用的解決方法:

A_1, A_2 兩個區域我們都討論，依照目的做選擇:

當想要面積最小值時，就選取面積較小的一塊(A_1)

當想要面積最大值時，就選取面積較大的一塊(A_2)



按照這種解決方法，我們可以發現**有效區域面積最小值和最大值會同時發生**。而其發生條件我們在有效區域面積最小值的討論中再進行深入研究。

(二)有效區域面積最小值—凸曲線

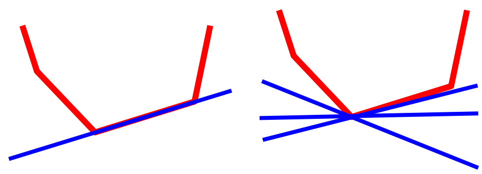
接著討論**有效區域面積最小值**，首先討論 **P 點位在曲線 C 上或外部**的情形，此時只須作過 P 點的「**支持直線**」L，便能圍出最小的有效區域，而支持直線的定義如下:

●**支持直線**: *(supporting curve)*

定義: 對於曲線 C，當直線 L 滿足: 曲線 C 完全位於直線 L 的同一側(可在直線 L 上)，則稱直線 L 為曲線 C 的支持直線。

例如: 右圖中的藍色直線皆為曲線的支持直線。

而我發現當直線 L 為曲線 C 的支持直線時，實際上直線 L 和曲線 C 並沒有圍出有效區域，因此我定義了支持直線的極限型式。



●**極限支持直線**:

定義: 對於曲線 C 及曲線 C 的支持直線 L_S，若直線 L 滿足: 直線 L 和支持直線 L_S 的距離→0，且直線 L 和曲線 C 有交點，則稱直線 L 為曲線 C 的極限支持曲線。

由這個概念，我們可以馬上得到定理 2:

定理 2

當曲線 C 為凸曲線時，對於曲線 C 上或外部的點 P:

「有效區域面積→0」 ⇔ 「直線 L 為曲線 C 的極限支持直線」

Proof:

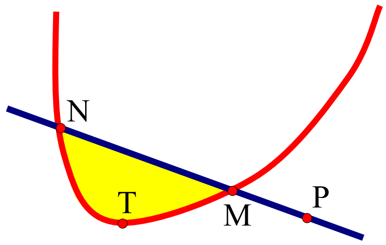
(1)反設直線 L 非曲線 C 的極限支持曲線，則 $\overline{MN}, \overline{MT}, \angle NMT$ 非無窮小量(如右圖)

故有效區域面積 $>$ ΔAMT 面積(凸曲線性質) $= \frac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{MT}\cdot\angle NMT$ (非無窮小量)

因此，「$\Rightarrow$」成立

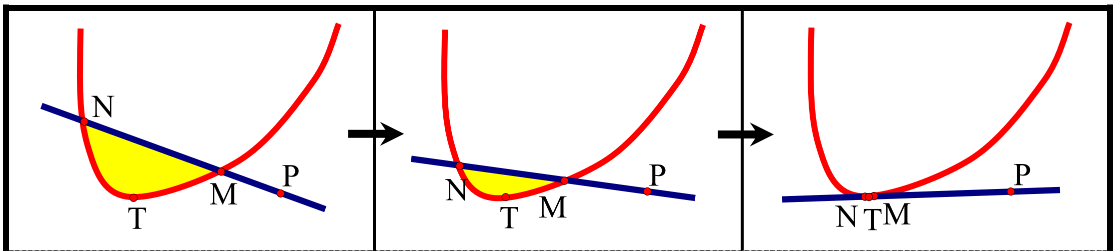
(2)當直線 L 為曲線 C 的極限支持曲線，$\overline{MN}\to 0$

故有效區域面積$\to 0$，因此，「$\Leftarrow$」成立



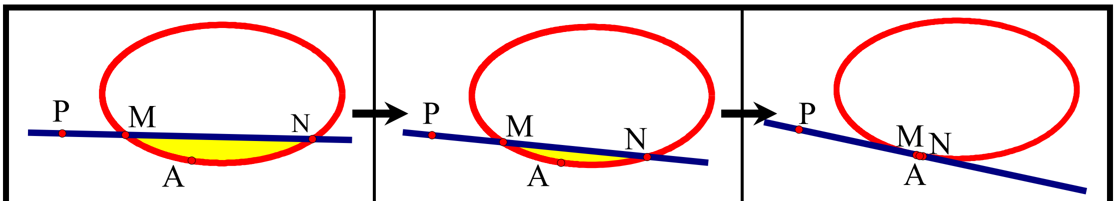
<u>說明及圖形:</u>

舉例 1: 非封閉凸曲線



有效區域面積= 9.18	有效區域面積= 3.17	有效區域面積$\to 0$

舉例 2: 封閉凸曲線



有效區域面積= 13.89	有效區域面積= 5.90	有效區域面積$\to 0$

其中，若曲線 C 是封閉曲線，有效區域面積最大值也會發生在直線 L 為極限支持直線時。因此，針對**一般化曲線**，我決定先討論<u>**凸曲線**</u>，並分為<u>**非封閉凸曲線**</u>和<u>**封閉凸曲線**</u>兩部

(三)有效區域面積最小值—非封閉凸曲線

<u>**引理 4**</u>

當曲線 C 為非封閉曲線時:

「曲線 C 為嚴格凸曲線」 $\Rightarrow$ 「對於曲線 C 內任意 P 點，過 P 點等分截線存在且唯一」

Proof:

(1)「$\Rightarrow$」:

因為曲線 C 是非封閉凸曲線，所以旋轉成凹口向上的形式後，可視為 y=C(x) 方程的圖形，其中 C(x)為顯函數(許多曲線無法化做顯函數的形式)，而曲線 C 為嚴格凸曲線，所以 C(x)為一對一函數，故任意平行 y 軸的直線僅交曲線 C 於一點。

A.存在性:

考慮曲線 C 上動點 M(x, y)，令 $f(x)$ 為點 P, M 的距離函數, $g(x)$ 為 P, N 的距離函數

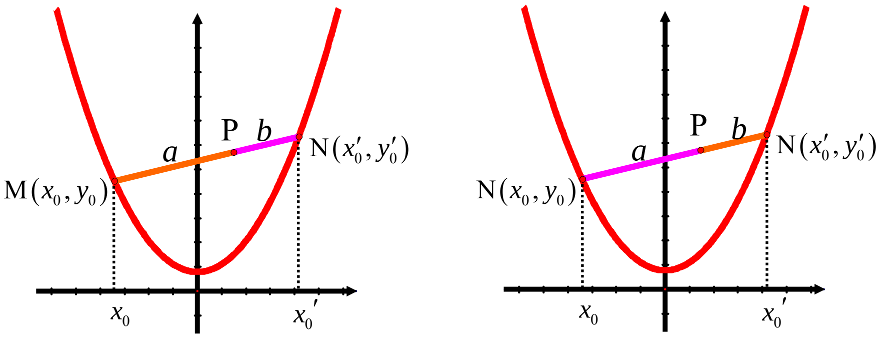
因為 $f(x), g(x) \geq 0$，故可定義函數 $h(x) = \frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = \frac{f(x)}{g(x)}$

因為 $f(x), g(x)$ 對於全體實數連續(證明參見附錄 3)，故 $h(x)$ 亦對全體實數連續

當 $x=x_0$ 時(如下左圖)，假設 $f(x_0)=\overline{PM}=a$, $g(x_0)=\overline{PN}=b$ ，則 $h(x_0)=\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}=\dfrac{a}{b}$

當點 M 移動到點 N，則點 N 會位於點 M 原先的位置上(即 M, N 交換位置)

因此 $f(x_0')=\overline{PM}=b$, $g(x_0')=\overline{PN}=a$ ，故此時 $h(x_0')=\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}}=\dfrac{f(x_0')}{g(x_0')}=\dfrac{b}{a}$



因為 1 介於 $h(x_0)=\dfrac{a}{b}$ 和 $h(x_0')=\dfrac{b}{a}$ 之間，由中間值定理(*The Intermediate Value Theorem*):

存在 $x\in R$ ，使得 $h(x)=1$ ，也就是說存在 M 點，使得 $\overline{PM}=\overline{PN}$

B.唯一性:

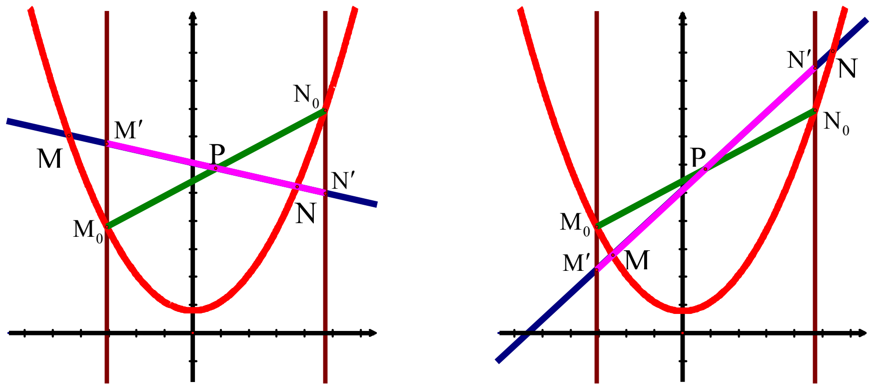
由以上討論知道存在等分截線 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$ ，考慮曲線 C 上動點 M 及其伴生點 N

不失一般性，令 M 在 N 左側。過 M_0, N_0 作鉛直線分別交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於 M', N' :

①當 M 在 M_0 左方(見下左圖): $\overline{PM}>\overline{PM'}=\overline{PN'}>\overline{PN}$

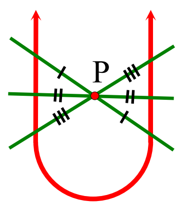
②當 M 在 M_0 右方(見下右圖): $\overline{PM}<\overline{PM'}=\overline{PN'}<\overline{PN}$

因此對於任意非 M_0 之點 M， $\overline{PM}\neq\overline{PN}$ ，故等分截線唯一(即 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$)。



注意到，**此引理的逆定理**是**不成立**的，仍然有非凸曲線能使等分截線唯一。而此引理條件為嚴格凸曲線，而非凸曲線，因為有些凸曲線並沒有這個性質的:

例如: 右圖為兩射線加上一個半圓所形成的曲線，滿足曲線要求的連續性以及凸曲線的定義，但對於其對稱軸上 P 點，過 P 點等分截線(圖中綠線)有無限多條。因此，此引理的條件必須是嚴格凸曲線。



藉由引理 4，我們便可得到定理 3:

定理 3

當曲線 C 為非封閉凸曲線時，對於曲線 C 內 P 點:

「有效區域面積發生最小值」 ⇔ 「直線 L 為等分截線」

Proof:

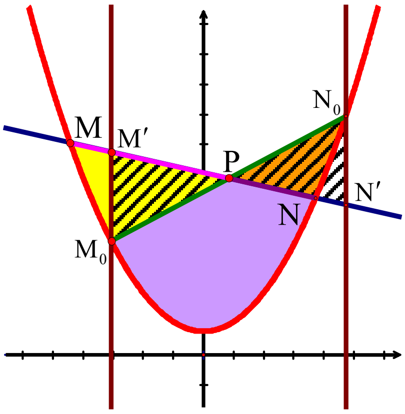
因為有效區域面積皆為正值，故有效區域面積有最小值

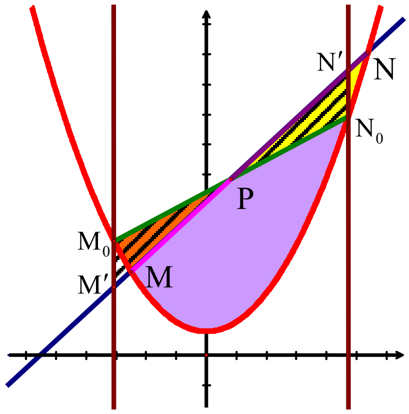
由引理 4 知存在唯一等分截線 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$ ，考慮曲線 C 上一動點 M

過 M_0, N_0 作鉛直線分別交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於 M', N' ，直觀的我們能看出(嚴謹證明見後文):

(1)當 M 在 M_0 左方時: 黃色區域面積 $> \triangle PM'M_0 = \triangle PN'N_0 >$ 橘色區域面積。

(2)當 M 在 M_0 左方時: 黃色區域面積 $> \triangle PN'N_0 = \triangle PM'M_0 >$ 橘色區域面積。





由於 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍有效區域面積 ＝ 黃色區域面積 ＋ 紫色區域面積

等分截線 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$ 所圍有效區域面積 ＝ 橘色區域面積 ＋ 紫色區域面積

故 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍有效區域面積 ＞ 等分截線 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$ 所圍有效區域面積

因此，有效區域面積發生最小值 $\Leftrightarrow$ 直線 L 為等分截線

※<u>黃色區域面積>橘色區域面積的證明:</u>

(1)當 M 在 M_0 左方時(見下圖):

令 $\angle MPM_0 = \angle NPN_0 = \theta$ ，將 $\angle MPM_0$ 及 $\angle NPN_0$ 切割成 k 個小角度 $d\theta = \dfrac{\theta}{k}$

則當 $k \to \infty$ 時， $d\theta = \dfrac{\theta}{k} \to 0$ ，因此切割出的區域可以視為三角形

故區域 PM_0M_1 面積 $= \overline{PM_0} \cdot \overline{PM_1} \cdot \sin d\theta$, 區域 PN_0N_1 面積 $= \overline{PN_0} \cdot \overline{PN_1} \cdot \sin d\theta$

由引理 4 唯一性部分證明中的討論，可以得知 $\overline{PM_1} > \overline{PN_1}$

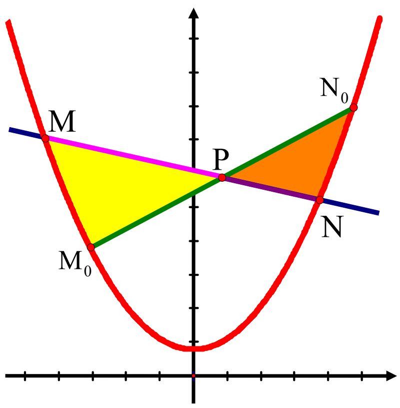
故區域 PM_0M_1 面積 ＞ 區域 PN_0N_1 面積

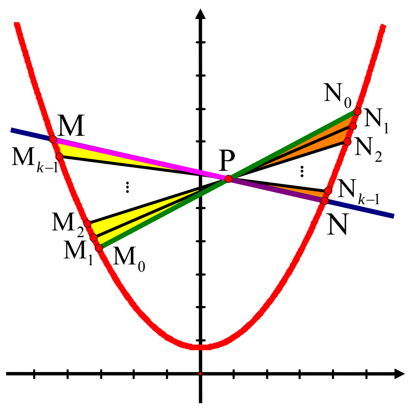
同理我們有: 區域 PM_1M_2 面積 ＞ 區域 PN_1N_2 面積

⋮

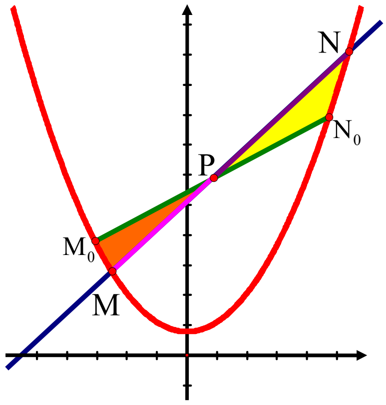
區域 $PM_{k-1}M$ 面積 ＞ 區域 $PN_{k-1}N$ 面積

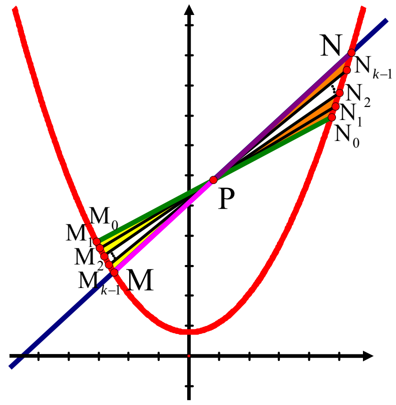
相加即得: 黃色區域面積 ＞ 橘色區域面積





(2)當 M 在 M_0 右方時(見下圖):　同理，得黃色區域面積 < 橘色區域面積





在證明的過程中，運用到的加總求合方法，不僅僅讓我們找出了<u>**有效區域面積最小值**發生的條件</u>。其實更進一步說明了:當**直線 L 在旋轉**時，<u>**有效區域面積的變化**</u>，實際上有效區域面積的變化也是有一定規則的，其敘述如下(後文有舉例說明):

推論 1

當曲線 C 為非封閉嚴格凸曲線時，對於曲線 C 內部 P 點，隨直線 L 逆時針旋轉，有效區域面積呈以下變化: (直線 L 斜率為 *m*)

「 ∞→(嚴格遞減)→最小值→(嚴格遞增)→∞ 」 (最小值發生在 *m* 為某確切值時)

Proof:

由引理 4 知存在唯一等分截線 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$，考慮曲線 C 上一動點 M 的移動過程:

不失一般性，令 M 點在其伴生點 N 左邊

(1)當 M 點向右靠近 M_0 到 M^* 點:(見下左圖)

過 M^*，N^* 點作鉛直線，交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於 M', N' 點，則 $\triangle PMM' \sim \triangle PNN'$，且 $\overline{PM^*} > \overline{PN^*}$

故 $\triangle PMM' > \triangle PNN'$，得黃色區域面積 > $\triangle PMM'$ > $\triangle PNN'$ > 橘色區域面積

而 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍有效區域面積 ＝ 黃色區域面積 ＋ 紫色區域面積

　> 橘色區域面積 ＋ 紫色區域面積 ＝ $\overleftrightarrow{M^*N^*}$ 所圍有效區域面積

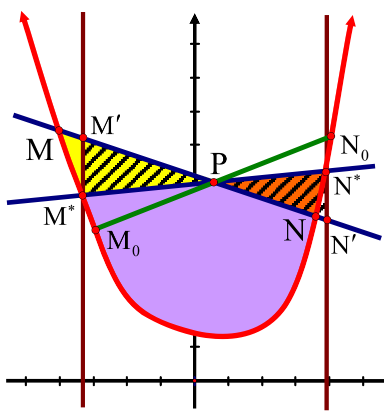
因此，當 M 點向右靠近 M_0 到 M^* 點時，有效區域面積嚴格遞減。

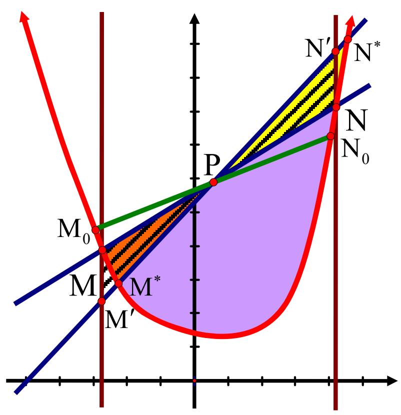
(2)當 M 點向右遠離 M_0 到 M^* 點:(見下右圖)

同理，得黃色區域面積 > $\triangle PNN'$ > $\triangle PMM'$ > 橘色區域面積

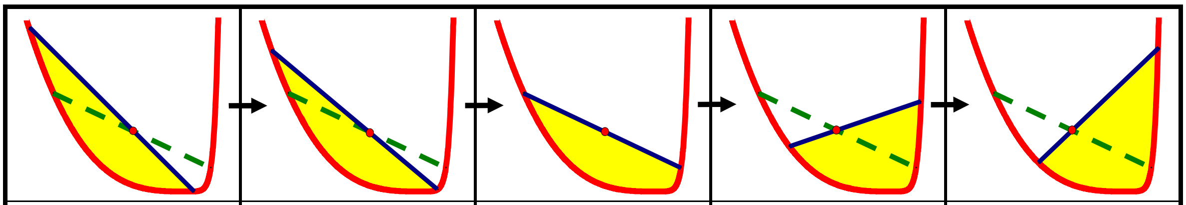
故 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍有效區域面積 < $\overleftrightarrow{M^*N^*}$ 所圍有效區域面積

因此，當 M 點向右遠離 M_0 到 M^* 點時，有效區域面積嚴格遞減





例子: 有效區域面積的變化



11.68	11.34	**10.62(最小值)**	12.23	15.90

其中對於嚴格凸曲線，等分截線總是唯一的，但對於**一般的凸曲線**，$\overline{PM^*}=\overline{PN^*}$ 是可能成立的，因為當曲線 C 是**凸曲線，等分截線可能並不唯一**，有以下推論 2:

推論 2

當曲線 C 為非封閉凸曲線時，對於曲線 C 內部 P 點，隨直線 L 逆時針旋轉，有效區域面積呈以下變化: (直線 L 斜率為 m)

「∞→(嚴格遞減)→最小值→(嚴格遞增)→∞」 (最小值發生在 m 屬於某區間時)

Proof: (此證明和推論 1 十分相像，其中「>」改為「≧」,「<」改為「≦」)

由引理 4 的延伸，知存在曲線 C 上弧 $\overset{\frown}{QR}$ (Q 點在 R 點左邊)，對於 $\overset{\frown}{QR}$ 上點 A:

A 點在其伴生點 B 左邊，且 $\overleftrightarrow{AB}$ 為等分截線

考慮曲線 C 上一動點 M 的移動過程: (不失一般性，令 M 點在其伴生點 N 左邊)

(1)當 M 點向右靠近 Q 到 M^* 點:

過 M^*,N^* 點作鉛直線，交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於 M',N'點，則 $\triangle PMM' \sim \triangle PNN'$，且 $\overline{PM^*} \geq \overline{PN^*}$

故 $\triangle PMM' \geq \triangle PNN'$，得黃色區域面積≧ $\triangle PMM' \geq \triangle PNN'$ ≧橘色區域面積

而 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍有效區域面積 ＝ 黃色區域面積 ＋ 紫色區域面積

≧ 橘色區域面積 ＋ 紫色區域面積 ＝ $\overleftrightarrow{M^*N^*}$ 所圍有效區域面積

因此，當 M 點向右靠近 M_0 到 M^* 點時，有效區域面積嚴格遞減。

(2)當 M 點向右遠離 R 到 M^* 點:

同理，得黃色區域面積≧ $\triangle PNN' \geq \triangle PMM'$ ≧橘色區域面積

故 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍有效區域面積≦ $\overleftrightarrow{M^*N^*}$ 所圍有效區域面積

因此，當 M 點向右遠離 M_0 到 M^* 點時，有效區域面積嚴格遞增

(3)當 M 點從 Q 點靠近 $\overset{\frown}{QR}$ 上 S 點: 設 Q,S 的伴生點分別為 Q',S'

令 $\angle QPS=\angle Q'PS'=\theta$，將 $\angle QPS$ 及 $\angle Q'PS'$ 切割成 k 個小角度 $d\theta=\frac{\theta}{k}$

則當 $k\to\infty$ 時，$d\theta=\frac{\theta}{k}\to 0$，因此切割出的區域可以視為三角形

故區域 PM_0M_1 面積$=\overline{PM_0}\cdot\overline{PM_1}\cdot\sin d\theta$，區域 PN_0N_1 面積$=\overline{PN_0}\cdot\overline{PN_1}\cdot\sin d\theta$

因為對於 $\overset{\frown}{QR}$ 上點 A，$\overline{PA}=\overline{PB}$，故區域 PM_0M_1 面積 ＝ 區域 PN_0N_1 面積

同理我們有: 區域 PM_1M_2 面積 ＝ 區域 PN_1N_2 面積

⋮

區域 $PM_{k-1}M$ 面積 ＝ 區域 $PN_{k-1}N$ 面積

相加即得: 黃色區域面積 ＝ 橘色區域面積

因此，有效區域面積在移動過程中不會改變

總結以上，可知隨直線 L 旋轉「∞→(嚴格遞減)→最小值→(嚴格遞增)→∞」

其中，當 M 在 $\overset{\frown}{QR}$ 上時，有效區域皆為最小值

(四)封閉點對稱凸曲線

接著討論**<u>封閉凸曲線</u>**，但我發現**等分截線不一定擁有唯一性**，經過不斷的嘗試後，我發現到: **<u>點對稱</u>**的封閉曲線似乎都有**等分截線唯一**的性質，因此我大膽的猜測: 曲線 C 是點對稱得圖形是等分截線唯一的充要條件。

在此為了證明這個猜想，我首先證明一個關於**<u>點對稱嚴格封閉凸曲線</u>**的性質

> **<u>引理 5</u>**
>
> **當曲線 C 為封閉曲線時:**
>
> **「曲線 C 為點對稱嚴格凸曲線」 ⇔ 「對於曲線 C 內任意 P 點，曲線 C 與曲線 C'恰交於兩點或完全重合(曲線 C'是曲線 C 以 P 點為中心旋轉 180°所得)」**

Proof:

(1)「⇒」: (符號「X'」為點 X 旋轉後的對應點)

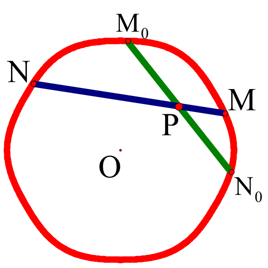
A.若 P 點為曲線 C 的點對稱中心時:

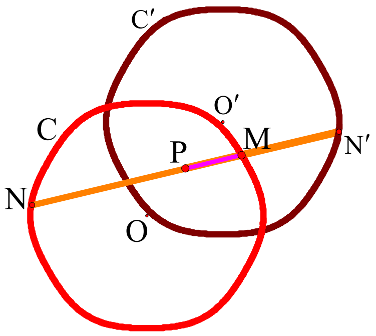
因為 P 點為點對稱中心，故曲線 C 與曲線 C'完全重合。

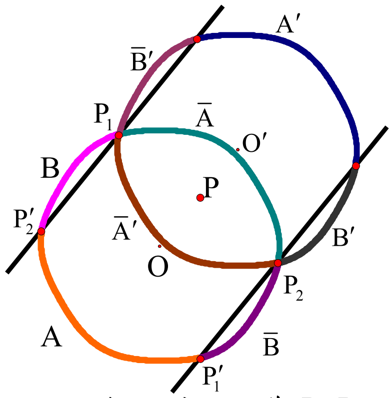
B.若 P 點非曲線 C 的點對稱中心時:

曲線 C 上動點 M 及其伴生點 N，將 C 以 P 點為中心旋轉 180°成為 C'(如下中圖)

因為 N,P,M 共線且 N,P, N′ 共線，因此 P,M, N′ 共線







而因為點 P 在曲線 C 內部，因此 C 和 C'至少會交於兩點，假設該兩點為 P_1,P_2

則 P_1', P_2' 也在曲線 C 上(見上右圖)並令 P_1,P_2, P_1', P_2' 將曲線 C 分割為弧 A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$:

①弧 $\bar{A}'$ 和曲線 C 的交點(見下圖)

因為弧 A 和弧 $\bar{A}'$ 分別為弧 $\bar{A}$ 對點 P,點 O 旋轉 180°的對應圖形

因此弧 $\bar{A}'$ 可視為弧 A 以向量 $\overrightarrow{P_1'P_2}$ 平移後的圖形

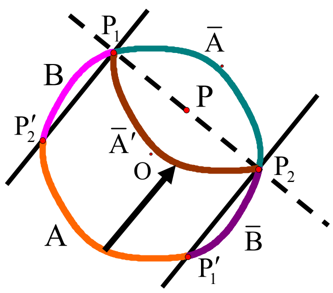
其中因為曲線 C 為凸曲線，因此弧 A 位在 $\overleftrightarrow{P_1'P_2}$ 及 $\overleftrightarrow{P_2'P_1}$ 之間

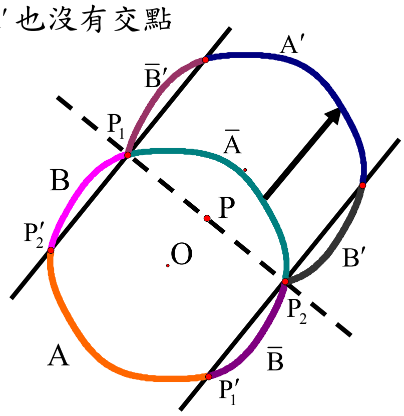
故弧 A 和弧 A 平移後所得弧 $\bar{A}'$ 沒有交點

而因為曲線 C 為凸曲線，故弧 B 和 $\bar{A}'$ 在 $\overleftrightarrow{P_2'P_1}$ 異側，同理弧 $\bar{B}$ 和弧 $\bar{A}'$ 在 $\overleftrightarrow{P_2'P_1}$ 異側

而連接 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ，因為曲線 C 為凸曲線，故弧 $\bar{A}$ 和弧 $\bar{A}'$ 也沒有交點

綜合以上，弧 $\bar{A}'$ 和 C 沒有交點(如不考慮 P_1,P_2)





②弧 A',弧 B',弧 $\bar{B}'$ 和曲線 C 的交點(見下圖):

因為曲線 C 為凸曲線，故弧 A,弧 B,弧 $\bar{B}$ 及弧 A',弧 B',弧 $\bar{B}'$ 位於 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 異側

因此弧 A',弧 B',弧 $\bar{B}'$ 和弧 A,弧 B,弧 $\bar{B}$ 沒有交點

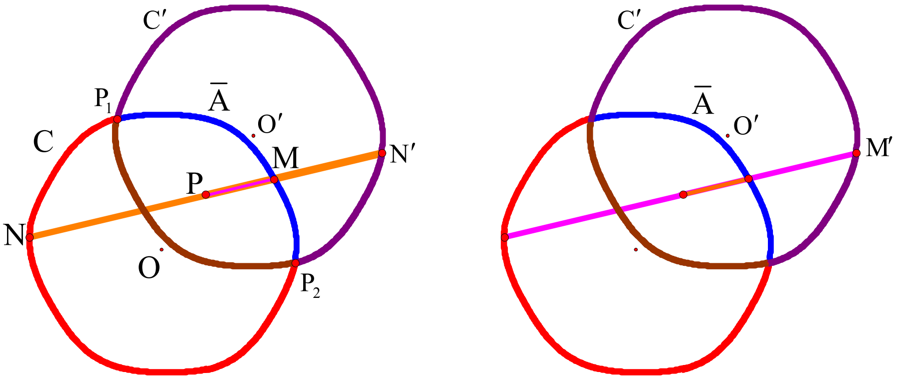
而因為弧 A',弧 $\bar{A}$ 分別為弧 A 對點 P,點 O 旋轉 180°的對應圖形

因此弧 A' 可視為弧 $\bar{A}$ 以向量 $\overrightarrow{P_1'P_2}$ 平移後的圖形

其中因為曲線 C 為凸曲線，因此弧 $\bar{A}$ 位在 $\overleftrightarrow{P_1'P_2}$ 及 $\overleftrightarrow{P_2'P_1}$ 之間

故弧 $\bar{A}$ 和弧 $\bar{A}$ 平移後所得弧 A' 沒有交點

綜合以上，弧 A',弧 B',弧 $\bar{B}'$ 和曲線 C 沒有交點(如不考慮 P_1,P_2)



因此，曲線 C 和曲線 C'僅交於 P_1,P_2 兩點，故「⇒」成立

(2)「⇐」: (符號「$\overset{\frown}{AB}$」表示曲線 C 上 A, B 點間的連線，「X'」為 X 旋轉後的對應點)

以下證明分兩階段: ①嚴格凸曲線 ②點對稱嚴格凸曲線

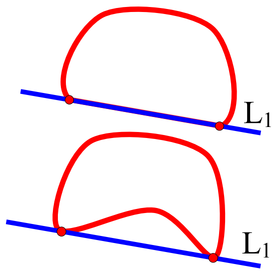
①反設曲線 C 非嚴格凸曲線，則存在一「凹部」或「直部」

(凹部: 非凸的部分; 直部: 曲線 C 上 A,B 點，$\overline{AB}$ 在曲線 C 上)

若有直部，則令該直線為 L_1(如右上圖)

否則若有凹部，表示存在直線 L_1 同時與兩峰相切

令兩切點為 A, B(點 A 在點 B 左邊)，$\overleftrightarrow{AB}$ 為 L_1(如右圖)



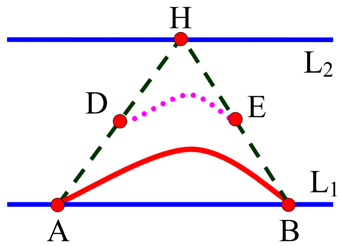
將圖形旋轉，使得 L_1 在圖形最下方(如右下圖)，並作曲線最高點 H 的切線 L_2

已知曲線 C 不可能在 L_1, L_2 之外(根據 L_1, L_2 的作法)

將 $\overset{\frown}{AB}$ 以 H 點為中心縮小兩倍成為 $\overset{\frown}{DE}$

則當 P 點在 $\overset{\frown}{DE}$ 時，H'會在 $\overset{\frown}{AB}$ 上

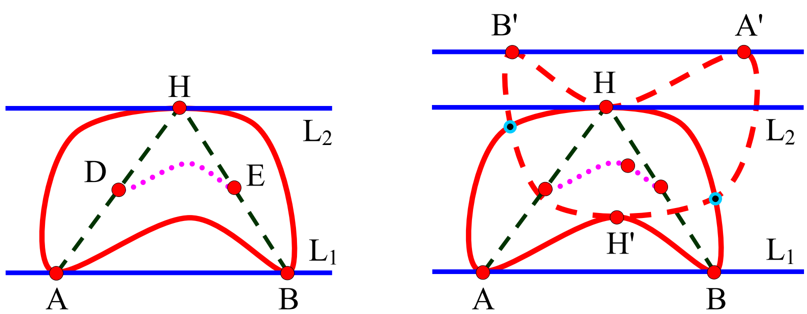
A.若 $\overset{\frown}{DE}$ 上存在某點在曲線 C 內:



令該點為 P，則 H'在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，B, H'在 $\overset{\frown}{AH}$ 同側

故 B', H'在 $\overset{\frown}{AH}$ 異側，意即 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{B'C'}$ 有交點，同理 $\overset{\frown}{BC}$ 和 $\overset{\frown}{A'C'}$ 有交點

因此，存在 P 點，使得曲線 C 和曲線 C'至少有 4 個交點(包含 H, H')，矛盾



B.若 $\overset{\frown}{DE}$ 任意點皆在曲線 C 外:

易知 $\overset{\frown}{AC}$ 及 $\overset{\frown}{BC}$ 都在 D 的左側或 E 的右側，不失一般性，設為前者

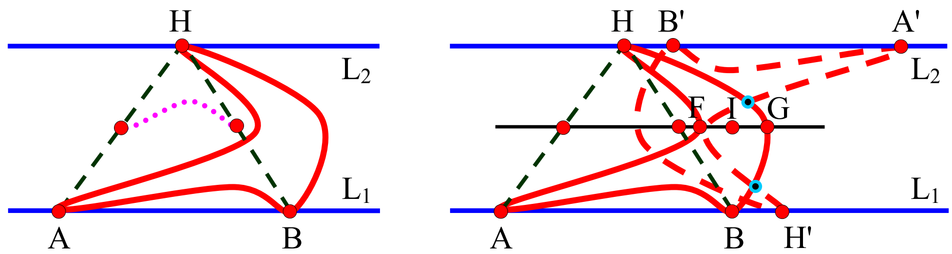
作 $\overleftrightarrow{DE}$ 交曲線 C 於數點，選取最左邊即最右邊的點 F, G，作 F, G 中點 I

令 P 點為 I，則 F 旋轉至 G，G 旋轉至 F

而 B 以 E 為中心旋轉 180°會對應到 H 點，而 I 在 E 右邊，故 B'在 H 右邊

而 H'在 B 右邊，又因為 F 在 G 左邊，故 $\overset{\frown}{BGH}$ 及 $\overset{\frown}{B'FH'}$ 至少有兩交點

因此，存在 P 點，使得曲線 C 和曲線 C'至少有 4 個交點(包含 I, I')，矛盾



②反設曲線 C 非點對稱嚴格凸曲線

由以上討論知曲線 C 為嚴格凸曲線

故存在兩平行的切線 L_1, L_2(如右圖)，切點分別為 A, B

作 L_3 使其與 L_1, L_2 等距，L_3 與曲線 C 交於 D, E，則令 P 為 $\overline{DE}$ 中點:

則 D 旋轉到 E，E 旋轉到 D，至少有兩交點

A.如果 B'在 A 下方:

$\overset{\frown}{BC}$ 和 $\overset{\frown}{A'D}$ 有交點，$\overset{\frown}{B'D}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 也有交點

因此，存在 P 點，使得曲線 C 和曲線 C'至少有 4 個交點(包含 D,E)，矛盾

B.如果 B'在 A 上方:

$\overset{\frown}{BD}$ 和 $\overset{\frown}{A'C}$ 有交點，$\overset{\frown}{B'C}$ 和 $\overset{\frown}{AD}$ 也有交點

因此，存在 P 點，使得曲線 C 和曲線 C'至少有 4 個交點(包含 D,E)，矛盾

因此當曲線 C 不是點對稱嚴格凸曲線，一定能找到不符條件的 P 點，故「⇐」成立

有了引理 5 之後，我們就能迅速完成**等分截線唯一性**的討論:

引理 6

當曲線 C 為封閉曲線時:

「曲線 C 為點對稱嚴格凸曲線」 ⇔ 「對於曲線 C 內任意非點對稱中心的 P 點，過 P 點等分截線存在且唯一」

Proof:

(1)「⇒」:

①存在性:

將曲線 C 以 P 點為中心旋轉 180°成為曲線 C'

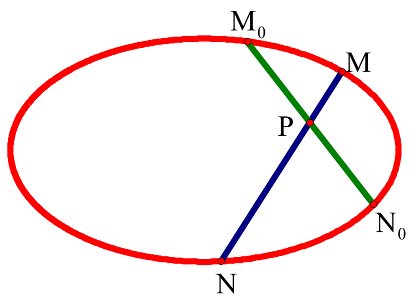
由引理 5 知曲線 C 及 C'至多交於兩點 M_0, N_0

此時 $\overline{PM_0} = \overline{PN_0}$，故 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$ 便是一條等分截線

②唯一性:

已知存在等分截線 $\overleftrightarrow{M_0N_0}$ (見右圖)

考慮曲線 C 上非 M_0 或 N_0 的動點 M 及其伴生點 N



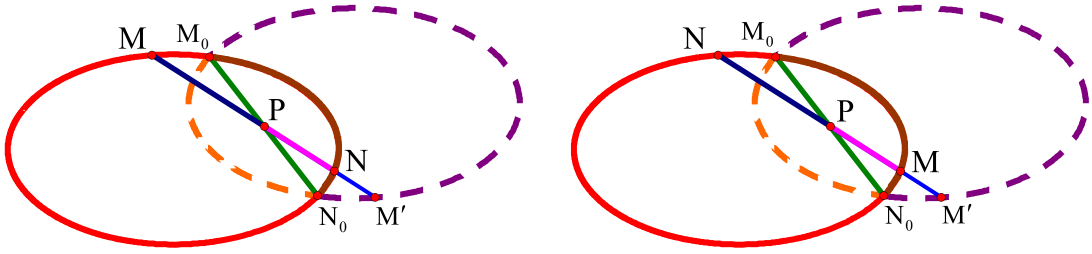
A.當點 M 在較長弧 $\overset{\frown}{M_0N_0}$ (下左圖紅色弧)上:

P,N,M'共線，而 M'在曲線 C 外部，故 $\overline{PN}<\overline{PM'}=\overline{PM}$ ，所以直線 L 非等分截線

B.當點 M 在較短弧 $\overset{\frown}{M_0N_0}$ (下右圖褐色弧)上:

同理， $\overline{PN}=\overline{PN'}>\overline{PM}$ ，所以直線 L 非等分截線

總結以上，知等分截線唯一(即直線 $\overrightarrow{M_0N_0}$)，因此「⇒」成立



(2)反設封閉曲線 C 非點對稱嚴格凸曲線，則由引理 5 證明中的討論知:

封閉曲線 C 若非點對稱嚴格凸曲線，則存在 P 點，使得曲線 C 與 C'交於至少 4 點

所以有兩條等分截線，矛盾，因此「⇐」成立

定理 4

當曲線 C 為封閉點對稱凸曲線時，若 P 點位於曲線 C 內部:

「有效區域面積發生最大值或最小值」 ⇔ 「直線 L 為等分截線」

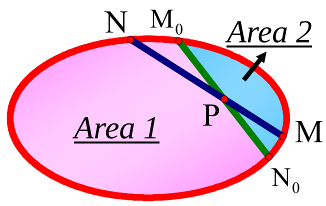
Proof:

首先因為有效區域面積皆為正值且小於曲線 C 內部面積，故存在最大值及最小值

因為有效區域面積最大值和最小值同時發生，故先針對最小值的部分討論如下:

(1)當 P 點為曲線 C 點對稱中心時: 有效區域面積恆為曲線 C 內部面積一半，命題成立

(2)當 P 點非曲線 C 點對稱中心時:



由引理 6 知存在唯一等分截線 $\overrightarrow{M_0N_0}$ (如右圖)

考慮曲線 C 上動點 M(不失一般性，令 M 是較短弧上的點)

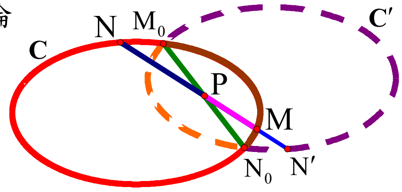
因為 $\overrightarrow{M_0N_0}$ 隨 P 點位置而確定，故有效區域是固定的

而 $\overrightarrow{MN}$ 會圍出兩塊有效區域，所以兩有效區域都需要討論

其中，選取不含中心點的那一塊(目的為最小面積)

將曲線 C 以 P 點為中心旋轉 180°得曲線 C'

由引理 5 知曲線 C 和曲線 C'僅交於兩點 M_0, N_0

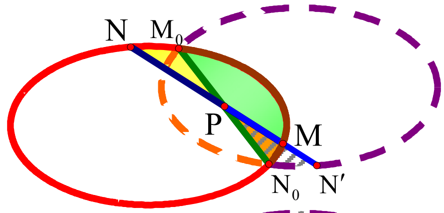


A.當有效區域是藍色區域時(如右圖):

黃色區域面積 ＝ 斜線區域面積 ＞ 橘色區域面積

故 $\overrightarrow{MN}$ 所圍有效區域 ＝ 黃色區域+綠色區域

＞ 橘色區域+綠色區域 ＝ $\overrightarrow{M_0N_0}$ 所圍有效區域

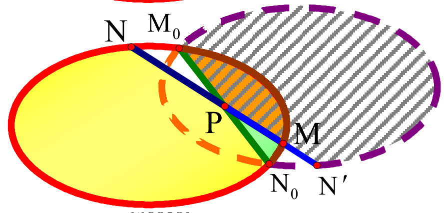


B.當有效區域是紫色區域時(如右圖):

黃色區域面積 ＝ 斜線區域面積 ＞ 橘色區域面積

故 $\overrightarrow{MN}$ 所圍有效區域 ＝ 黃色區域+綠色區域

＞ 橘色區域+綠色區域 ＝ $\overrightarrow{M_0N_0}$ 所圍有效區域

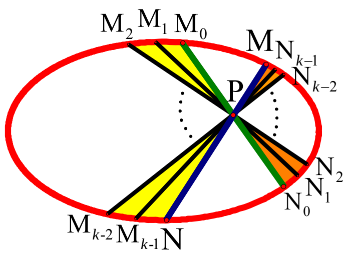


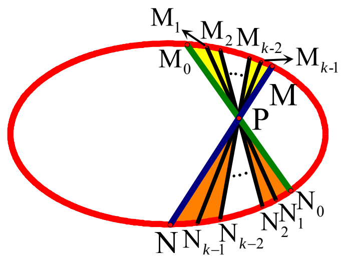
所以，不論 $\overrightarrow{MN}$ 所圍有效區域如何選取， $\overrightarrow{MN}$ 所圍有效區域 ＞ $\overrightarrow{M_0N_0}$ 所圍有效區域

而對於有效區域面積最大值，$\overline{MN}$ 所圍有效區域 < $\overline{M_0N_0}$ 所圍有效區域(選取 Area 1)

因此，**有效區域面積有最大值或最小值⇔直線 L 為等分截線**

※<u>黃色區域面積>橘色區域面積:</u>　如定理 3 般將其切割為無窮多塊三角形比較





推論 3

當曲線 C 為點對稱嚴格封閉凸曲線，對於曲線 C 內部 P 點，隨直線 L 逆時針旋轉，有效區域面積呈以下循環: (直線 L 斜率為 *m*)

「最小值→(嚴格遞增)→最大值→(嚴格遞減)」 (最值發生在 *m* 為某確切值時)

Proof:

由定理 4 知有效區域得最值都發生在直線 L 為等分截線時:

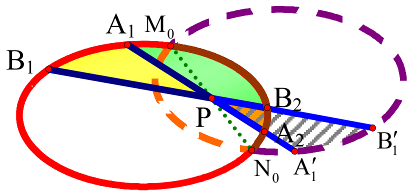
A.當 M 點從點 M_0 移動到點 N_0: 考慮 M 點從點 A_1 移動到點 B_1

黃色區域面積 = 斜線區域面積 > 橘色區域面積

故 $\overline{B_1B_2}$ 所圍有效區域 = 黃色區域+綠色區域

> 橘色區域+綠色區域 = $\overline{A_1A_2}$ 所圍有效區域

故此階段有效區域面積嚴格遞增

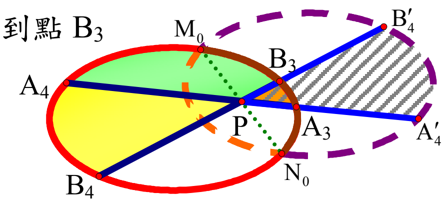


B.當 M 點從點 N_0 移動到點 M_0: 考慮 M 點從點 A_3 移動到點 B_3

同理，黃色區域面積 > 橘色區域面積

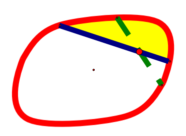
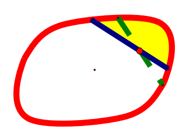
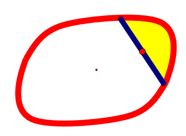
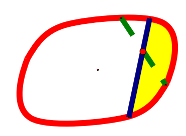
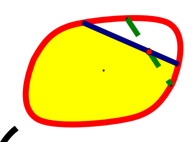
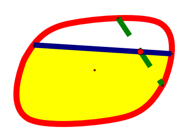
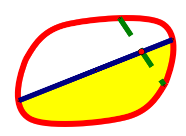
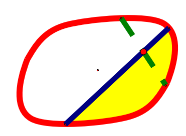
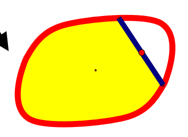
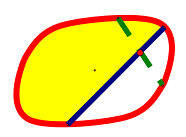
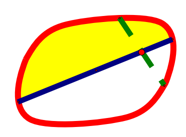
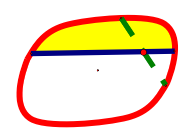
故 $\overline{A_3A_4}$ 所圍有效區域 < $\overline{B_3B_4}$ 所圍有效區域

故此階段有效區域面積嚴格遞減



總結以上，得有效區域面積呈「最小值→(嚴格遞增)→最大值→(嚴格遞減)」的循環

<u>例子:</u>　有效區域面積的變化

			
65.00	54.46	**45.85 (最小值)**	74.27
			
305.50	269.94	204.27 (等分面積)	114.21
			
316.49 (最大值)	248.10	175.78	112.43

(五)封閉凸曲線

接著我想更進一步討論關於非點對稱的**封閉嚴格凸曲線**，有效區域面積極值發生的充要條件。然而，因為**等分截線並不唯一**，所以如果我們將曲線 C 旋轉 180°後成為 C'，曲線 C 和曲線 C'可能會相交於許多點。幸運的是，經過不斷的實驗及觀察後，我發現了一個更有趣的性質，為定理 4 更一般化的形式(意即定理 4 為此定理的特例)。因為是關於「**多等分截線**」圖形的定理，所以證明較為抽象難懂，我們先舉個簡單的例子來說明:

Example:

一條**御飯糰形狀的曲線 C**，我們首先將她**以點 P 為中心旋轉 180°成為 C'**，那麼 P 點不同位置的選取，便會造成曲線 C 與 C'交點數目的改變，此處針對 6 個交點的情形(見下圖)進行討論: (以下僅針對極小值和最小值進行討論)

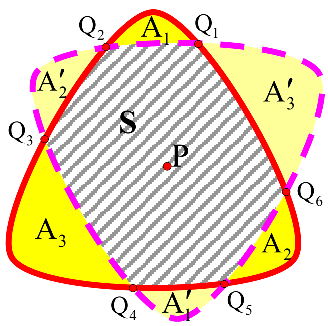
首先我們令 C 與 C′ 的交集區域面積為 S，C 與 C′ 的交點逆時針標記為 $Q_1,\dots,Q_6$

並稱在 C 內卻不在 C′ 的三個區域為 Area 1, Area 2, Area 3

令三區域面積為 A_1, A_2, A_3 $(A_1 \le A_2 \le A_3)$，經旋轉後成為 A_1', A_2', A_3' $(A_1'=A_1, A_2'=A_2, A_3'=A_3)$

由於整個圖形關於點 P 對稱，因此 $\overleftrightarrow{Q_1Q_4}, \overleftrightarrow{Q_2Q_5}, \overleftrightarrow{Q_3Q_6}$ 都是等分截線

可知三條等分截線各圍出了兩個有效區域，因此共有 6 個有效面積值，分別是:



$\overleftrightarrow{Q_1Q_4}$: $\frac{1}{2}S+A_2$ 及 $\frac{1}{2}S+A_1+A_3$

$\overleftrightarrow{Q_2Q_5}$: $\frac{1}{2}S+A_3$ 及 $\frac{1}{2}S+A_1+A_2$

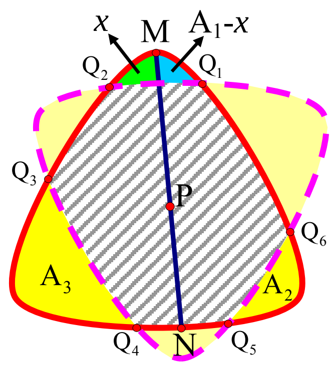
$\overleftrightarrow{Q_3Q_6}$: $\frac{1}{2}S+A_1$ 及 $\frac{1}{2}S+A_2+A_3$

其中因為 $A_1 \le A_2 \le A_3$，因此 $\frac{1}{2}S+A_1$ 是最小的。

考慮曲線 C 上動點 M 及其伴生點 N，討論如下:

當 M 或 N 位在弧 $\overset{\frown}{Q_1Q_2}$ 上(不含 Q_1, Q_2):

見右圖，假設綠色區域的面積為 x $(0<x<A_1)$



則兩有效區域面積 $\frac{1}{2}S+A_3+x > \frac{1}{2}S+A_3 > \frac{1}{2}S+A_1$

$\frac{1}{2}S+A_2+(A_1-x) > \frac{1}{2}S+A_2 > \frac{1}{2}S+A_1$

同理，當 M 或 N 位在其他弧上(不含 Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6):

也有 $\overleftrightarrow{MN}$ 所圍面積 > $\frac{1}{2}S+A_1$

因此，每當直線 L 為等分截線時，會發生極小值

有效區域面積最小值為 $\frac{1}{2}S+A_1$，發生在直線 L 為等分截線 $\overleftrightarrow{Q_3Q_6}$ 時

由以上討論，我發現雖然等分截線不一定唯一，但**直線 L 為等分截線**似乎是**有效區域面積極小值的充要條件**，而其中<u>某一條等分截線便能圍出有效區域面積最小值</u>:

定理 5

當曲線 C 為封閉凸曲線時，若 P 點位於曲線 C 內部:

「有效區域面積發生極大值或極小值」 ⇔ 「直線 L 為等分截線」

Proof:

將曲線 C 以 P 點為中心旋轉 180°成為 C'，令 C 與 C' 交集區域面積為 S

令曲線 C 和曲線 C' 的 $2n$ 個交點為 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2n}$ (如兩曲線相切，依然記為兩點)

並將在曲線 C 內但在曲線 C' 外的區域逆時針標記為 $A_1, \ldots, A_n$ (A_i 在 Q_{2i-1}, Q_{2i} 間) (如兩曲線相切，依然做標記，但其面積為 0)

易知 $\overline{Q_1Q_{n+1}}, \overline{Q_2Q_{n+2}}, \ldots, \overline{Q_nQ_{2n}}$ 皆為等分截線(此時等分截線不唯一)

又因為曲線是封閉的，因此共圍出了 $2n$ 個有效區域，記面積最小者面積為 $\bar{A}$

考慮 $\overset{\frown}{Q_iQ_{i+1}}$ 弧(實線)上動點 M(在 $A_{\frac{i+1}{2}}$ 中)，此時 $\overline{MN}$ 會分割 $A_{\frac{i+1}{2}}$ 為兩區域

設其面積分別為 a, b ($0 \le a, b \le A_{\frac{i+1}{2}}$)

$\overline{MN}$ 所圍有效區域面積(左) =

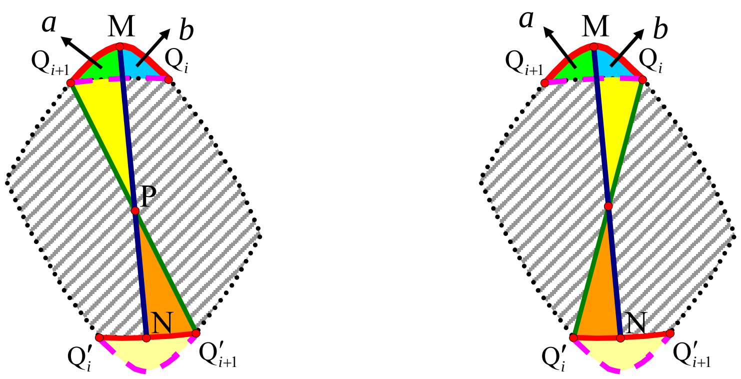
$\overline{Q_{i+1}Q'_{i+1}}$ 所圍有效區域面積(左)－橘色區域面積+黃色區域面積+綠色區域面積(a)

其中黃色區域和橘色區域關於 P 點對稱，因此橘色區域面積 = 黃色區域面積

因此 $\overline{MN}$ 所圍有效區域面積(左) = $\overline{Q_{i+1}Q'_{i+1}}$ 所圍有效區域面積(左) + a

$> \overline{Q_{i+1}Q'_{i+1}}$ 所圍有效區域面積(左) ≥ $\bar{A}$ (見下左圖)

$\overline{MN}$ 所圍有效區域面積(右) > $\overline{Q_iQ'_i}$ 所圍有效區域面積(右) ≥ $\bar{A}$ (見下右圖)



因此，有效區域面積有極小值(面積極大值同時發生)若且唯若直線 L 為等分截線

並且，$\bar{A}$ 為有效區域面積最小值，而此時直線 L 為其中一條等分截線

因此，有效區域面積有最小值(面積最大值同時發生)發生在直線 L 為等分截線時

推論 4

當曲線 C 為封閉嚴格凸曲線，對於曲線 C 內部 P 點，隨直線 L 逆時針旋轉，有效區域面積呈以下循環: (直線 L 斜率為 m)

「極小值→(嚴格遞增)→極大值→(嚴格遞減)→……→極大值→(嚴格遞減)」

Proof:

由定理 5 知有效區域極小值和極大值都發生在直線 L 為等分截線時

延續定理 5 證明中的想法:

(1)M 點在 $\overset{\frown}{Q_iQ_{i+1}}$ 弧(實線)上移動時:　此時選擇左邊的有效區域

$\overset{\frown}{MN}$ 所圍有效區域面積 ＝ $\overset{\frown}{Q_{i+1}Q'_{i+1}}$ 所圍有效區域面積 ＋ 綠色區域面積(a)

其中 $\overset{\frown}{Q_{i+1}Q'_{i+1}}$ 所圍有效區域面積為定值

而綠色曲域面積隨 M 點從點 Q_{i+1} 移動到點 Q_i，綠色區域面積嚴格遞增

故 $\overset{\frown}{MN}$ 所圍有效區域面積(左)嚴格遞增

(2) M 點在 $\overset{\frown}{Q_iQ_{i+1}}$ 弧(實線)上移動時:

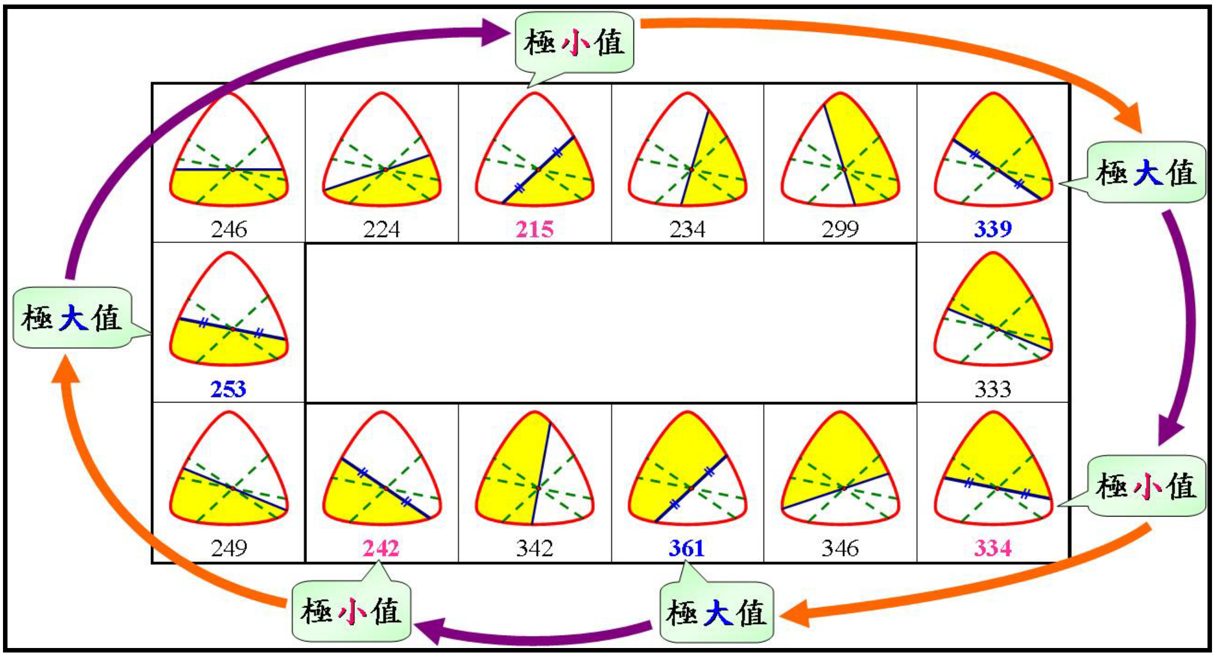
因為我們沒有改變有效區域的選取，此時圍出的是右邊的有效區域

故 $\overset{\frown}{MN}$ 所圍有效區域面積(右)＝ 曲線 C 內部區域面積 － $\overset{\frown}{MN}$ 所圍有效區域面積(左)

而 $\overset{\frown}{MN}$ 所圍有效區域面積(左)嚴格遞增，因此，$\overset{\frown}{MN}$ 所圍有效區域面積(右)嚴格遞減

總結以上，知命題成立

例子:　有效區域面積的變化



以上關於**封閉凸曲線**的討論中，幾乎都局限於**嚴格凸曲線**的情形，是因為在引理 6 中，可知若曲線 C 不是嚴格點對稱凸曲線，那麼「有些」在曲線 C 內的 P 點，會造成等分截線不唯一，但是「有些」P 點又能使等分截線唯一，因此不易統一討論。

其中，若曲線 C 只是點對稱凸曲線，那麼等分截線可能是不唯一的，會如推論 2 一般，存在一段弧上的點皆能形成等分截線，也就是說極值發生時，直線 L 斜率非幾個單獨的值，而是**幾個區間內的值**皆符合。

四、一般化曲線

以上討論，我們希望找出的是**一種曲線 C，使得點 P 只要在曲線 C 內部，就會有等分截線圍出最小面積的性質**。然而，對於其他的曲線 C，可能只要點 P 在某些特定的位置或範圍時，就會有這些性質。也就是說，接下來我改變了策略，針對以下這個問題研究:

給定點 P，找出所有具有性質: 「**等分截線圍出最小面積**」的曲線 C!

首先，我先提出一個定理:

定理 6

當給定 P 點: (設 P 點為極坐標原點，極坐標中，曲線 C 的函數型式為 $r=C_{polar}(\theta)$)

「$r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數」 $\Leftrightarrow$ 「任意過 P 點直線交曲線 C 至多兩點」

Proof:

(1)「$\Rightarrow$」:

因為 $r=C_{polar}(\theta)$，故一個 θ 值唯一對應到一個 r 值

也就是說任意從 P 點出發的射線 $\overrightarrow{PX}$ (代表一個 θ 值)，都只會交曲線 C 於一點

因為過 P 點直線 L，可視為兩個以 P 點為起點的射線，故至多兩交點，「$\Rightarrow$」成立

(2)「$\Leftarrow$」:

反設 $r=C_{polar}(\theta)$ 非顯函數，則存在射線 $\overrightarrow{PX}$，交曲線 C 超過一點

而 $\overleftrightarrow{PX}$ 可是為射線 $\overrightarrow{PX}$ 聯集射線 $\overrightarrow{PX'}$，X'為 X 以 P 點為中心旋轉 180°的圖形

而射線 $\overrightarrow{PX}$ 交曲線 C 至少一點，故 $\overleftrightarrow{PX}$ 交曲線 C 於超過兩點，矛盾，故「$\Leftarrow$」成立

接著，討輪等分截線存在性及唯一性的充要條件:

定理 7

當給定 P 點: (設 P 點為極坐標原點，極坐標中，曲線 C 的函數型式為 $r=C_{polar}(\theta)$)

「$r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數且 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 只有兩組解(θ_0 及 $\theta_0+\pi$)」 $\Leftrightarrow$ 「過 P 點等分截線存在且唯一」

Proof:

(1)「$\Rightarrow$」:

因為 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 只有兩組解(θ_0 及 $\theta_0+\pi$)

也就是說曲線 C 以 P 點為中心旋轉 180°形成的曲線 C'

曲線 C 和曲線 C'只有兩個交點(交點即為解)，設為 A, B

故 $\overline{PA}=\overline{PB}$，意即 $\overleftrightarrow{AB}$ 是一條等分截線，故等分截線存在

並且因為曲線 C 和曲線 C'只有兩個交點

由三一律知 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 的關係不會改變(改變: $\overline{PA}<\overline{PB} \rightarrow \overline{PA}>\overline{PB}$，$\overline{PA}>\overline{PB} \rightarrow \overline{PA}<\overline{PB}$)

也就是說除了 $\overline{AB}$ 以外，其餘直線都不會是等分截線，

因此，等分截線毀在且唯一，「$\Rightarrow$」成立

(2)「$\Leftarrow$」:

反設 $r=C_{polar}(\theta)$ 非顯函數，則有效區域不唯一，不予討論

反設 $r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數但 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 不只有兩組解(θ_0 及 $\theta_0+\pi$)

則至少有兩條等分截線，矛盾，故命題成立

定理 8

當給定 P 點: (設 P 點為極坐標原點，極坐標中，曲線 C 的函數型式為 $r=C_{polar}(\theta)$)

「$r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數且 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 只有兩組解(θ_0 及 $\theta_0+\pi$)」 $\Leftrightarrow$ 「『有效區域面積有最值』$\Leftrightarrow$『直線 L 為等分截線』」

Proof:

(1)「$\Rightarrow$」:

與先前討論相同，因為曲線 C 和曲線 C'只有兩個交點(曲線 C'為曲線 C 以 P 點為中心旋轉 180°所得)

(2)「$\Leftarrow$」:

反設 $r=C_{polar}(\theta)$ 非顯函數，則有效區域部不唯一，不予討論

反設 $r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數但 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 不只有兩組解(θ_0 及 $\theta_0+\pi$)

則等分截線不唯一，有因為這些等分截線所圍有效區域有大小之分

故不可能全為最小值，矛盾，故「$\Leftarrow$」成立

定理 9

當給定 P 點: (設 P 點為極坐標原點，極坐標中，曲線 C 的函數型式為 $r=C_{polar}(\theta)$)

「$r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數」 $\Rightarrow$ 「『有效區域面積有極值』$\Leftrightarrow$『直線 L 為等分截線』」

Proof:

(1)「$\Rightarrow$」:

與針對封閉非點對稱凸曲線的討論方式相同

(2)「$\Leftarrow$」:

反設 $r=C_{polar}(\theta)$ 非顯函數，則有效區域部不唯一，不予討論，故「$\Leftarrow$」成立

肆、研究結果

一、當 P 點在曲線 C 外，有效區域面積極值發生的充要條件:

1.非封閉凸曲線 C:　最小值－極限支持直線　最大值－斜率 $m \to \lim_{x\to\infty} C'(x)$ 或 $m \to \lim_{x\to-\infty} C'(x)$

2.封閉凸曲線 C:　最小值－極限支持直線　最大值－極限支持直線

二、等分截線存在性及唯一性:

1.當曲線 C 為非封閉嚴格凸曲線 或 封閉點對稱凸曲線時:

∀ 曲線 C 內部任意 P 點，過 P 點等分截線存在且唯一

2.當曲線 C 為封閉非點對稱凸曲線

∀ 曲線 C 內部任意 P 點，過 P 點等分截線存在，但不一定唯一

三、有效區域面積極值發生條件:

1.當曲線 C 為凸曲線時:

∀ 曲線 C 內部任意 P 點，「直線 L 為等分截線」⇔「有效區域面積極值發生」

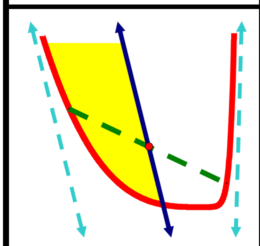
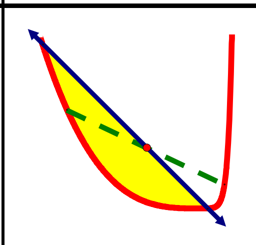
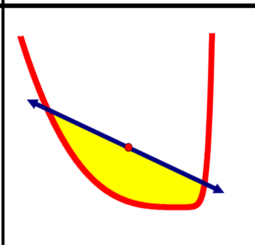
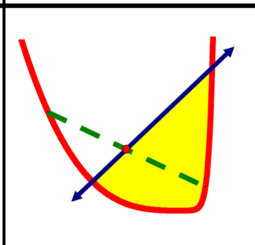
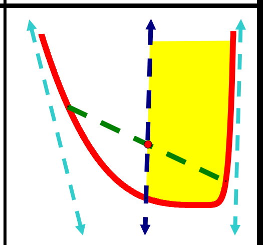
2.當曲線 C 為非封閉嚴格凸曲線 或 封閉點對稱凸曲線時:

∀ 曲線 C 內部任意 P 點，「直線 L 為等分截線」⇔「有效區域面積最值發生」

四、有效區域面積變化:

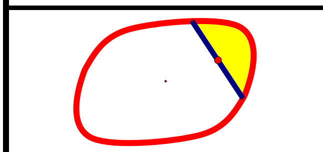
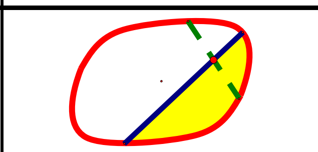
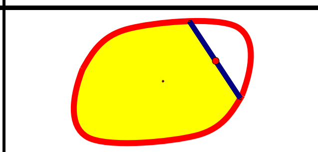
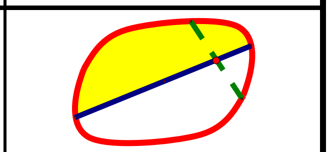
1.當曲線 C 為非封閉凸曲線時:

∀ 曲線 C 內部任意 P 點，隨直線 L 的旋轉，有效區域面積呈以下變化:

無窮大 →	(嚴格遞減) →	最小值 →	(嚴格遞增) →	無窮大
				
$m \to \lim_{x\to\infty} C'(x)$	…	等分截線	…	$m \to \lim_{x\to-\infty} C'(x)$

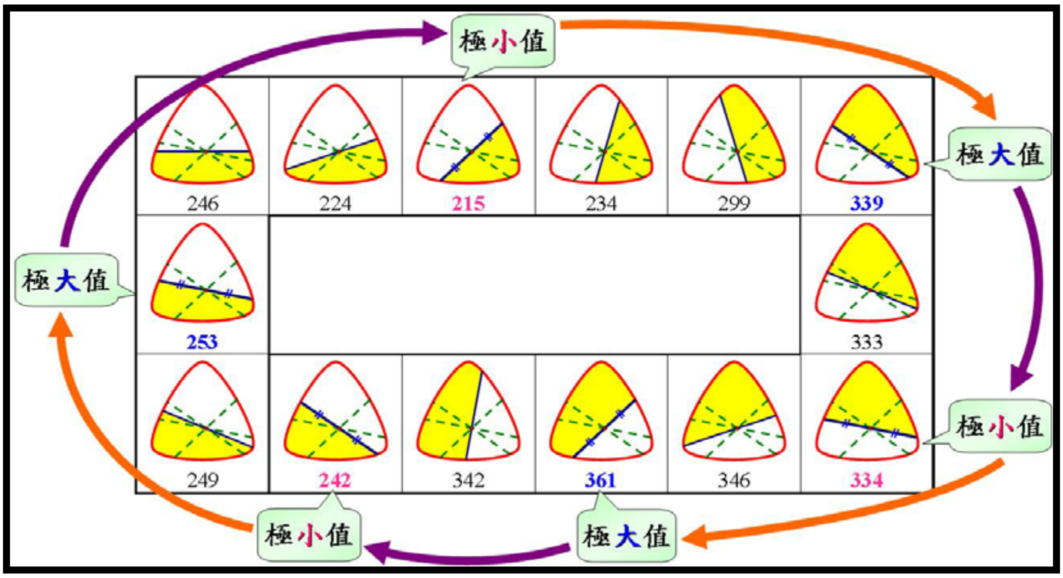
2.當曲線 C 為封閉點對稱凸曲線時:

∀ 曲線 C 內部任意 P 點，隨直線 L 的旋轉，有效區域面積呈以下變化:

最小值 →	(嚴格遞增) →	最大值 →	(嚴格遞減)
			
等分截線	…	等分截線	…

3.當曲線 C 為封閉非點對稱凸曲線時:

∀ 曲線 C 內部任意 P 點，隨直線 L 的旋轉，有效區域面積呈以下變化:



五、一般化曲線:　(令 P 為極點)

1.曲線 C 的函數形式 $r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數 ⇔ 若直線 L 圍出有效區域，則有效區域唯一

2.曲線 C 的函數形式 $r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數，且方程 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 只有兩組解 $\theta_0,\theta_0+\pi$

⇔ 過 P 點等分截線存在且唯一

3.曲線 C 的函數形式 $r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數

⇒ 「『直線 L 為等分截線』⇔『有效區域面積最值發生』」

4.曲線 C 的函數形式 $r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數，且方程 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 只有兩組解 $\theta_0,\theta_0+\pi$

⇒ 「『直線 L 為等分截線』⇔『有效區域面積最值發生』」

5.曲線 C 的函數形式 $r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數，且方程 $C_{polar}(\theta)=C_{polar}(\theta+\pi)$ 只有兩組解 $\theta_0,\theta_0+\pi$

⇔ 隨直線 L 的旋轉，有效區域面積呈以下變化:

「最小值→(嚴格遞增)→最大值→(嚴格遞減)」

6.曲線 C 的函數形式 $r=C_{polar}(\theta)$ 為顯函數

⇔ 隨直線 L 的旋轉，有效區域面積呈以下變化:

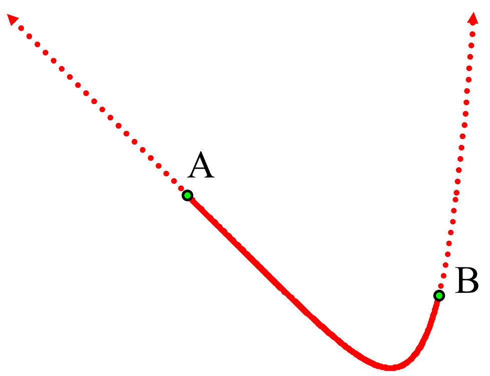
「極小值→(嚴格遞增)→極大值→(嚴格遞減)→……→極大值→(嚴格遞減)」

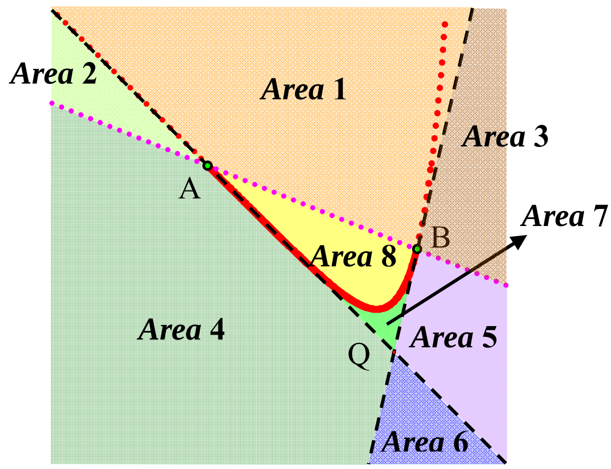
伍、討論與展望

一、有範圍限制的曲線:

在日常生活中，我們不容易看到完整的曲線或是無窮延伸的非封閉曲線，通常都是**有限**或**不完整**的曲線。而我發現藉由以上所得研究結果中有效區域面積變化的部分，能再進一步解決有限或不完整曲線的情形:

下左圖為我們舉的例子，若曲線 C 為某**非封閉凸曲線**的一部份，其兩端點分別為 A, B。首先做曲線 C 於 A,B 點的切線，假設兩切線交於 Q 點，如下右圖分割出八個區域:





接著我們依序討論點 P 在八個不同區域內的情形

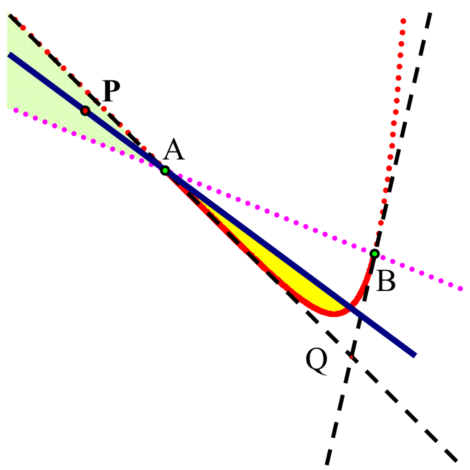
主要解決問題為: **要如何選取過 P 點直線，圍出最大或最小的面積?**

1.若點 P 位於 *Area* 1:

不可能圍出有效區域，因為過 P 點直線和曲線的交點最多只有 1 個。

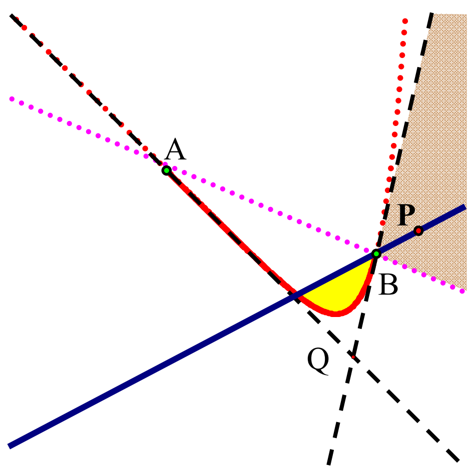
2.若點 P 位於 *Area* 2:

有效區域面積最大值發生在直線 L 為 $\overleftrightarrow{PA}$ 時(如下圖)。有效區域面積最小值 $\to 0$，發生在直線 L 為廣義等分截線時。



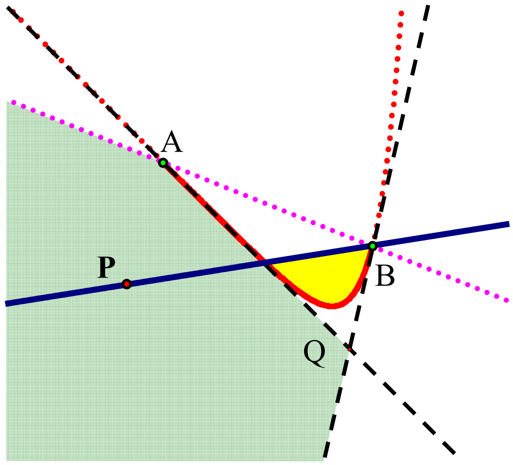
3.若點 P 位於 *Area* 3:

有效區域面積最大值發生在直線 L 為 $\overleftrightarrow{PB}$ 時(如下圖)。有效區域面積最小值 $\to 0$，發生在直線 L 為廣義等分截線時。



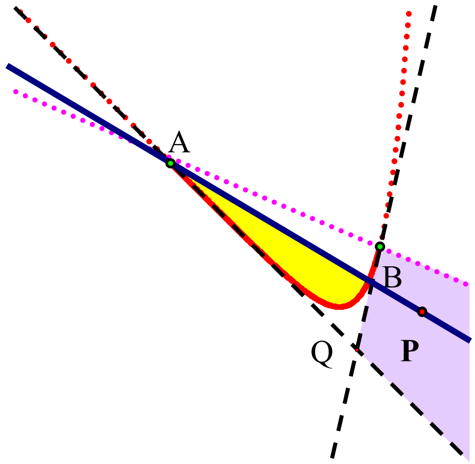
4.若點 P 位於 *Area* 4:

有效區域面積最大值發生在直線 L 為 $\overset{\frown}{PB}$ 時(如下圖)。有效區域面積最小值 →0，發生在直線 L 為廣義等分截線時。



5.若點 P 位於 *Area* 5:

有效區域面積最大值發生在直線 L 為 $\overset{\frown}{PB}$ 時(如下圖)。有效區域面積最小值 →0，發生在直線 L 為廣義等分截線時。

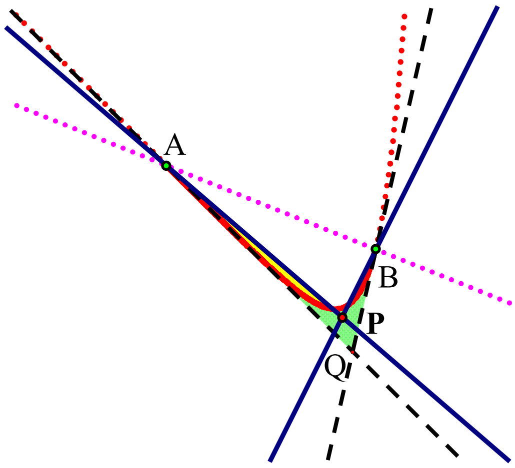


6.若點 P 位於 *Area* 6:

不可能圍出有效區域，因為過 P 點直線和曲線的交點最多只有 1 個。

7.若點 P 位於 *Area* 7:

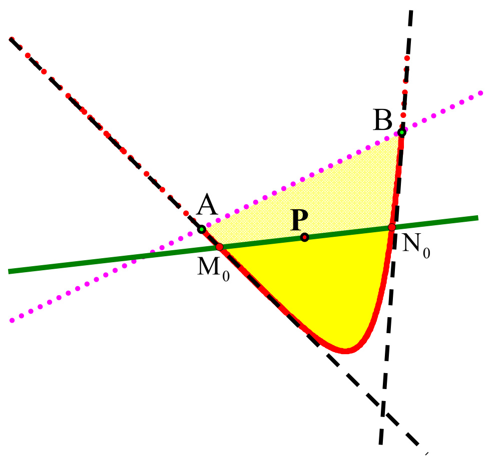
有效區域面積最大值發生在直線 L 為 $\overset{\frown}{PA}$ 或直線 L 為 $\overset{\frown}{PB}$ 時(如右圖)。有效區域面積最小值為 0，發生在直線 L 為廣義等分截線時。

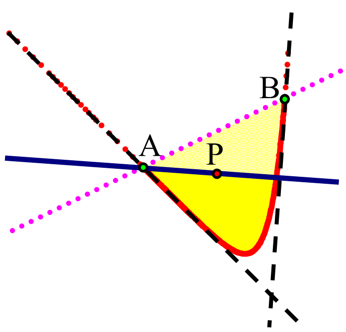


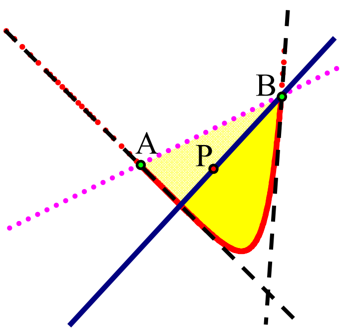
8.若點 P 位於 *Area* 8:

(1)若存在等分截線: (A, B 點已改變位置)

有效區域面積最大值發生在直線 L 為 $\overset{\frown}{PA}$ 或直線 L 為 $\overset{\frown}{PB}$ 時(如下方兩圖)。有效區域面積最小值則發生在直線 L 為等分截線時，如右圖。





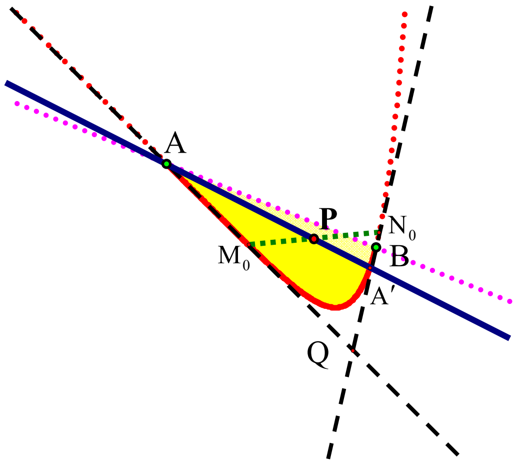


(2)若不存在等分截線:

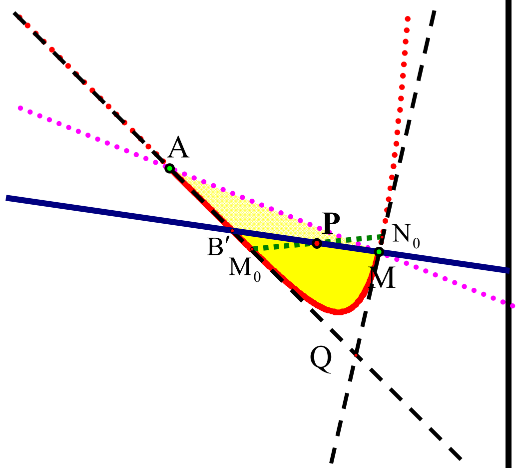
當不存在等分截線時，我們仍可以找出能圍出最小有效區域面積的可行直線。

①當 $\overline{PA}>\overline{PA'}$ ($\overline{PB}>\overline{PB'}$)時

●最大值: 直線 PA

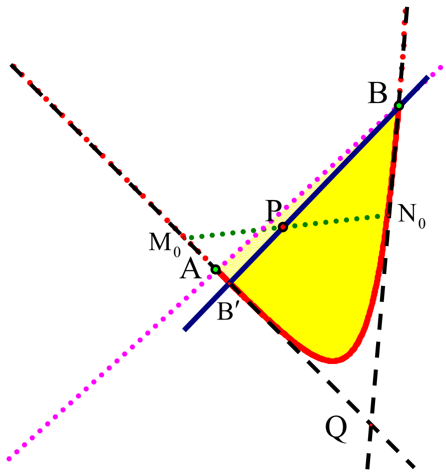


●最小值: 直線 PB

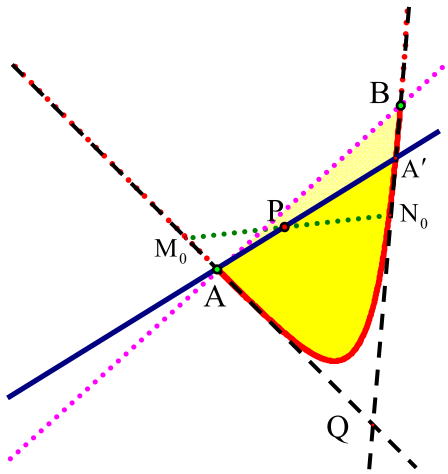


②當 $\overline{PA}<\overline{PA'}$ ($\overline{PB}<\overline{PB'}$)時: (A, B 點已改變位置)

●最大值: 直線 PB



●最小值: 直線 PA



以上為各種可能發生的情況，對於封閉圖形我們也可以藉由研究結果中，**有效區域面積變化**的部分加以進行研究。

※未來展望:

目前我期望能往以下方向發展:

1.對於**有效區域不唯一**的情形，該**如何定義有效區域?** 方能得到良好的結果?

2.是否有**經濟學**或**其他學科的模型**，正符合本報告的分析方法。

3.在**三維空間**中，**有效區域**及**等分截面**的定義都非常複雜。

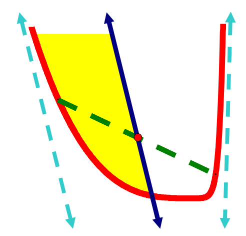
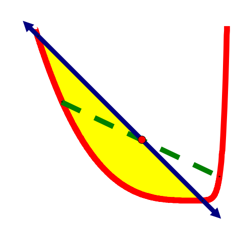
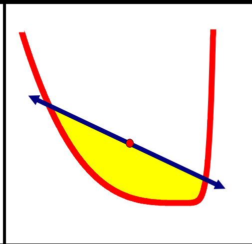
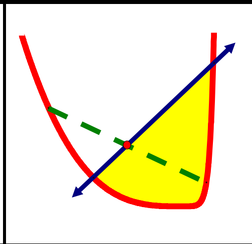
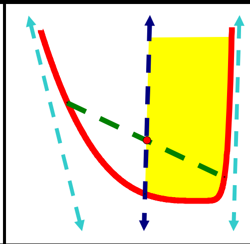
4.將現有證明再進一步簡化統整。

陸、研究結論

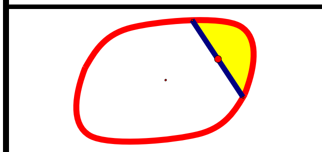
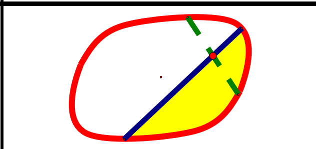
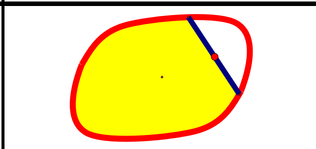
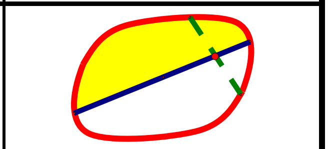
本研究證明**有效區域面積極值的充要條件:**

∀凸曲線及其內部點 P:　有效區域面積產生極值　⇔　直線 L 為等分截線

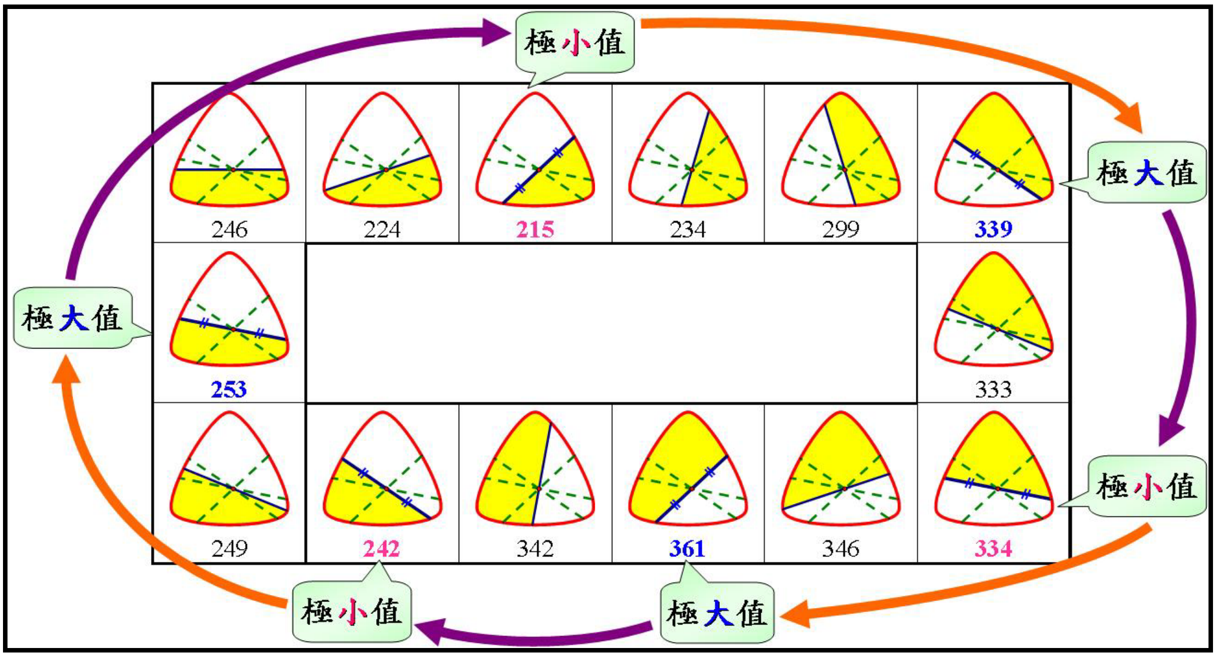
並且，∀非封閉凸曲線及其內部點 P，隨直線 L 的旋轉，有效區域面積呈以下變化:

無窮大 →	(嚴格遞減) →	最小值 →	(嚴格遞增) →	無窮大
				
$m \to \lim\limits_{x\to\infty} C'(x)$	…	等分截線	…	$m \to \lim\limits_{x\to-\infty} C'(x)$

∀封閉點對稱凸曲線及其內部點 P，隨直線 L 的旋轉，有效區域面積呈以下變化:

最小值 →	(嚴格遞增) →	最大值 →	(嚴格遞減)
			
等分截線	…	等分截線	…

∀封閉非點對稱凸曲線及其內部點 P，隨直線 L 的旋轉，有效區域面積呈以下變化:



柒、參考文獻

一、林政毅。函數圖形與直線所圍成面積之最小值問題。MTS 2010(南區)研習手冊。2010

二、林福來。普通高級中學選修數學(I)全一冊。第三章-不等式。南一出版社。2010

三、林福來。普通高級中學選修數學(II)全一冊。南一出版社。2010

四、方逵、姚杰。2006。平面參數曲線的凸性分析。長沙大學學報。第 20 卷第 2 期。頁 58-61

附錄 1　名詞定義表

1.**伴生點**:　給定曲線 C 上點 M，作 $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ 與曲線 C 的交點 N，則稱 N 為 M 的**伴生點**。

2.**等分截線**:　若直線 L 滿足: 直線 L 與曲線 C 僅交於兩點 M, N，且點 P 為線段 $\overline{\mathrm{MN}}$ 的中點時(此時 P 在 $\overline{\mathrm{MN}}$ 上)，則稱直線 L 為曲線 C 的**等分截線**(如下圖綠色直線)。

3.**有效區域**:　若直線 L 與曲線 C 僅交兩點 M, N，$\overline{\mathrm{MN}}$ 與曲線 C 圍成的封閉區域稱為**有效區域**。

4.**凸曲線**:　(*convex curve)*

幾何定義:　若曲線 C 滿足: 曲線 C 上任意 P 點，過 P 點有曲線 C 的切線 L，則曲線 C 完全位於 L 的同一側(可在 L 上)，則曲線 C 稱**凸曲線**。

點集拓撲定義:　若集合 *S* 滿足「$\forall \mathrm{A},\mathrm{B}\in S\ \forall\lambda\in[0,1]\quad \lambda\mathrm{A}+(1-\lambda)\mathrm{B}\in S$」(此類集合稱**凸集合**)，則集合 *S* 的邊界稱**凸曲線**。

5.**嚴格凸曲線**:

幾何定義:　若曲線 C 滿足: 曲線 C 上任意 P 點，過 P 點有曲線 C 的切線 L，則曲線 C 完全位於 L 的同一側(除了 P 點，其餘點皆不可在 L 上)，則曲線 C 稱**嚴格凸曲線**。

點集拓撲定義:　若集合 *S* 滿足「$\forall \mathrm{A},\mathrm{B}\in S\ \forall\lambda\in(0,1)\quad \lambda\mathrm{A}+(1-\lambda)\mathrm{B}\in S-\partial S$」($\partial S$ 為 *S* 的邊界)，則集合 *S* 的邊界稱**嚴格凸曲線**。

6.**支持直線**:　(*supporting curve)*

定義:　對於曲線 C，當直線 L 滿足: 曲線 C 完全位於直線 L 的同一側(可在直線 L 上)，則稱直線 L 為曲線 C 的**支持直線**。

7..**極限支持直線**:

定義:　對於曲線 C 及曲線 C 的支持直線 $\mathrm{L_S}$，若直線 L 滿足: 直線 L 和支持直線 $\mathrm{L_S}$ 的距離 $\to 0$，且直線 L 和曲線 C 有交點，則稱直線 L 為曲線 C 的**極限支持曲線**。