壹、前言

在一個悠閒的午後，在一本有關賽局理論的書《剪刀石頭布》中，我們發現了一道有趣的題目:

假如有三個人，打算來一場槍戰，槍戰的規則是: 槍法最差的可以開第一槍，第二差的開第二槍，依序輪流開槍，直到剩下一人活著為止。但根據統計，槍法最差只有三分之一機會打中目標，第二差的有三分之二機會，槍法最好的則是彈無虛發。如果你是槍法最差的那個，你該對誰開槍?

書中提出了以下解答: 對空鳴槍就好! 然而，槍手們的命中率改變時，最佳策略會更動嗎?因此，我們開始著手探討這個問題。首先我們以樹狀圖及幾何的方式分析兩人槍手賽局，接著以轉移矩陣及決策盒的想法討論三人槍手賽局，最後我們提出決策空間的概念，提供一種分析賽局的新方法。

貳、研究目的

一、探討兩人槍手賽局中，槍手們在不同命中率下的最佳策略組合及勝率。

二、探討三人槍手賽局中，槍手們在不同命中率下的最佳策略組合及勝率。

三、探討不完全信息賽局中，槍手的不完美最佳策略。

四、探討一般化賽局的用途及延伸。

參、研究過程

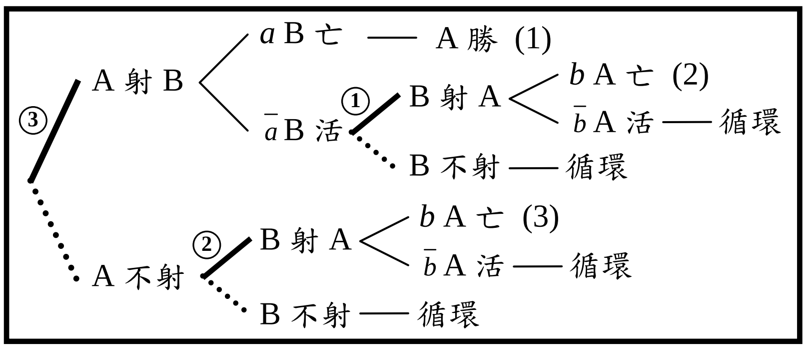
一、前提假設及符號說明:

我們將槍手依序命名為 A, B, C，分別有命中率值 a, b, c(我們不討論命中率為零的情形)，並以 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ 表示沒有命中的機率(即 $\bar{a}=1-a$)。每位槍手都有三種策略(包括不射擊)，且假設所有槍手是明智的，都會選擇讓自己有最大得勝率的策略，以符號 $P_{Xwin}(S)$ 表示槍手 X 在條件 S 下的得勝率。

二、兩人槍手賽局:

1.樹狀圖分析:

賽局從左端開始，依序經過槍手 A, B 的決策形成不同發展。其中，粗實線代表了兩不同策略中較好者，細實線代表賽局的發展，並分配有機率值。而經過一回合後，賽局可能會回到初始狀態(槍手 A, B 皆存活)，我們稱之為循環。

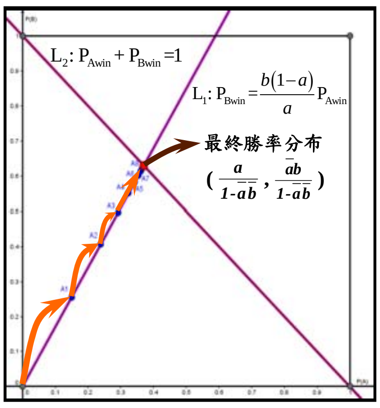


循環定理: 第 n 回合時，槍手 X 有最佳策略 S。則循環到下一回合時，槍手 X 的最佳策略亦為 S。

槍手 B 在①②時會選擇射擊槍手 A，而槍手 A 在③會選擇射擊槍手 B，故兩人的最佳策略組合為**(A 射 B, B 射 A)**，且兩人勝率一般式為 $P_{Awin}=\frac{a}{1-\bar{a}\bar{b}}$, $P_{Bwin}=\frac{\bar{a}b}{1-\bar{a}\bar{b}}$。

2.幾何思考:

若我們將 P_{Awin}, P_{Bwin} 當成 x, y 軸上移動的變量，並將每一回合後的機率分布點(P_{Awin}, P_{Bwin})，描繪於平面坐標系中，形成勝率分布圖，展示機率分布點隨時間(回合)的移動。由於最終狀態中勝率和為 1，因此 $P_{Awin}+P_{Bwin}$ 會逐漸趨近於 1，可知道軌跡為一直線，而其與直線 L: $P_{Awin}+P_{Bwin}=1$ 的交點便是**最終勝率分布**。



三、三人槍手賽局:

1.槍手策略組合編碼:

	A 射 B			A 射 C			A 不射		
	B 射 A	B 射 C	B 不射	B 射 A	B 射 C	B 不射	B 射 A	B 射 C	B 不射
C 射 A	策略(1)	策略(4)	策略(7)	策略(10)	策略(13)	策略(16)	策略(19)	策略(22)	策略(25)
C 射 B	策略(2)	策略(5)	策略(8)	策略(11)	策略(14)	策略(17)	策略(20)	策略(23)	策略(26)
C 不射	策略(3)	策略(6)	策略(9)	策略(12)	策略(15)	策略(18)	策略(21)	策略(24)	策略(27)

2.轉移矩陣:

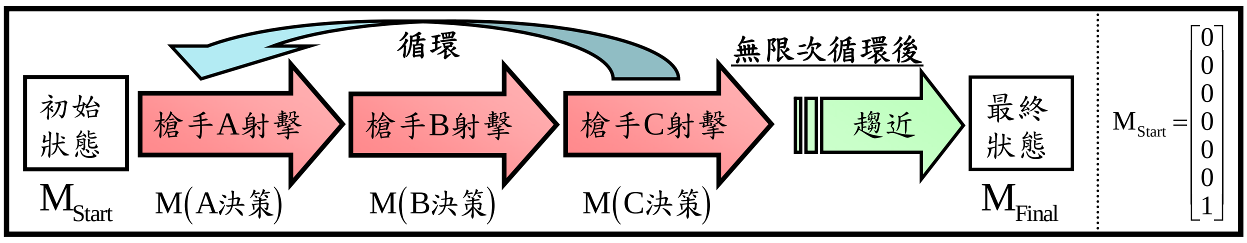
(矩陣以符號 M 表示) 我們以轉移矩陣來計算槍手們的勝率，舉個例子說明:

當槍手 A 選擇射 B 時:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{AB} & \text{BC} & \text{CA} & \text{ABC} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1-a \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{1.A活} \\ \text{2.B活} \\ \text{3.C活} \\ \text{4.AB活} \\ \text{5.BC活} \\ \text{6.CA活} \\ \text{7.ABC活} \end{array} \end{array}$$

狀態 1, 2, 3 為吸收狀態，賽局已結束(轉移回原狀態)。狀態 4, 6 為兩人槍手賽局，由前頁分析知最佳策略為射擊對方，因此有 a 的機率命中(轉移到狀態 1)，而有 $1-a$ 的機率沒射中(轉移回原狀態)。狀態 5 中，槍手 A 已死亡，無法射擊 B (轉移回原狀態)。狀態 7 中，槍手 A 選擇射擊 B，有 a 的機率命中(轉移到狀態 6)，而有 $1-a$ 的機率沒射中(轉移回原狀態)。

由下方流程圖得式 1，藉此我們可以算出各槍手的勝率(最終狀態 M_{Final} 中狀態 1, 2, 3 的機率值)



$$M_{Final}=\lim_{n\to\infty}\left(M(C決策)\times M(B決策)\times M(A決策)\right)^{n}\times M_{Start} \qquad 式 1$$

槍手賽局勝率之分析

Analysis of Gunmen's Strategies

3.研究方法: 總共四個步驟，我們以例子來說明

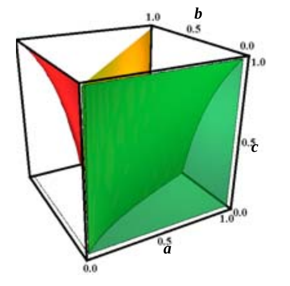
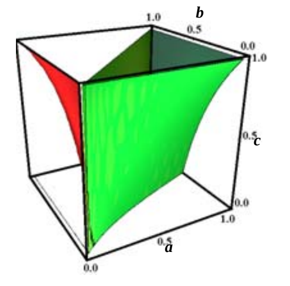
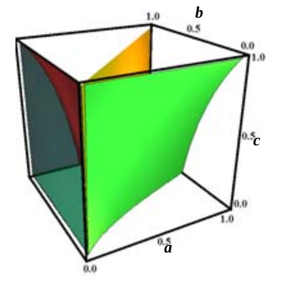
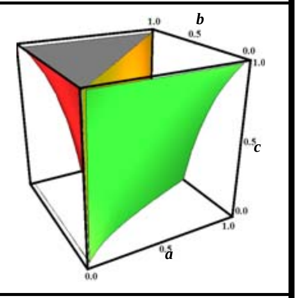
Step1 **找出已知槍手 A, B 的策略時，C 的最佳策略:**

<u>*Example:*</u> 槍手 A, B 的策略組合為 A 射 B 及 B 射 A (此時槍手 C 可能選擇策略(1),(2),(3))

藉由轉移矩陣的運算，我們能計算出槍手 C 選擇策略(1),(2),(3)的勝率值 $P_{Cwin}(1)$, $P_{Cwin}(2)$及 $P_{Cwin}(3)$。接著我們要比較其大小，因此將式子兩兩相減，找出大小關係成立的充要條件如下:

$P_{Cwin}(1) > P_{Cwin}(2) \Leftrightarrow a > b$	$P_{Cwin}(2) > P_{Cwin}(3) \Leftrightarrow c < \dfrac{\bar{a}^2 b^2 - ab}{\bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}}$	$P_{Cwin}(3) > P_{Cwin}(1) \Leftrightarrow c < \dfrac{a^2 \bar{b} - a\bar{a}b^2 - ab}{\bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}}$
$P_{Cwin}(1) < P_{Cwin}(2) \Leftrightarrow a < b$	$P_{Cwin}(2) < P_{Cwin}(3) \Leftrightarrow c > \dfrac{\bar{a}^2 b^2 - ab}{\bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}}$	$P_{Cwin}(3) < P_{Cwin}(1) \Leftrightarrow c > \dfrac{a^2 \bar{b} - a\bar{a}b^2 - ab}{\bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}}$

當我們將槍手命中率 a, b, c 視為空間坐標系中，分別在 x, y, z 軸上移動的變量，其可行解區為 $\{(a,b,c) | 0 < a,b,c \le 1\}$，即稜長為 1 之立方體。因此，曲面: $a = b$ 會是槍手 C 決定選擇策略(1)或(2)的臨界面，我們藉由軟體 *Mathematica* 將這些決策臨界面描繪在三維座標系中，觀察其切割出的區域，並對應到槍手 C 的最佳策略，如下表所示:

命中率的範圍	$a > b$		$a < b$	
	$c < \dfrac{a^2 \bar{b} - a\bar{a}b^2 - ab}{\bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}}$	$c > \dfrac{a^2 \bar{b} - a\bar{a}b^2 - ab}{\bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}}$	$c < \dfrac{\bar{a}^2 b^2 - ab}{\bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}}$	$c > \dfrac{\bar{a}^2 b^2 - ab}{\bar{a}^2 b^2 + a^2 \bar{b}}$
命中率範圍的對應區域圖形				
槍手 C 的最佳策略	**策略(3) - C 不射**	**策略(1) - C 射 A**	**策略(2) - C 射 B**	**策略(3) - C 不射**

以此方法類推便能完成 *Step1*，共有 **9 組**情形。

Step2 **找出已知槍手 A 的策略時，B 的最佳策略:**

仿照 *Step1*，槍手 A 選擇不同策略時，比較槍手 B 選擇三種策略的勝率，找出其最佳策略。

Step3 **找出 A 的最佳策略，建構三人槍手賽局的全決策盒:**

比較槍手 A 選擇三種策略的勝率，找出槍手 A 的最佳策略，並整合 *Step1,2* 的結果，將可行解區每一點對應到槍手們的最佳策略組合，建構三人槍手賽局的全決策盒。

4.延伸討論: 當不規定命中率最小者先射擊，哪一個策略組合成為最佳策略組合的機率最大呢?

在 27 種策略組合中，**策略(23)-A 不射、B, C 互射**成為最佳策略組合的機率最大(因其所占區域體積最大)。而**策略(16)-B 不射、A, C 互射**成為最佳策略組合的機率次之。

肆、研究結果

一、在兩人槍手賽局中，選擇射擊的勝率較不射擊的勝率大。且槍手 A, B (A 先射擊)的勝率值如下:

$$P_{Awin} = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{1-\bar{a}\bar{b}} \qquad P_{Bwin} = \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{\bar{a}b}{1-\bar{a}\bar{b}}$$

二、在兩人槍手賽局中，若槍手可以選擇射擊順序時，選擇先射的勝率較選擇後射的勝率大。此時當槍手 A 遇上任意對手 X 時，其勝率為: $P_{Awin}(\text{A先射}) = \dfrac{a}{1-(1-a)(1-x)} > P_{Awin}(\text{A後射}) = \dfrac{(1-x)a}{1-(1-a)(1-x)}$

三、在三人槍手賽局中，不同命中率的條件下，槍手們會有不同的最佳策略組合(策略(8),(9),(11),(15),(17)~(21),(24)~(27)不可能)，我們利用槍手們的最佳策略組合建構出三人槍手賽局的全決策盒。

伍、討論

<u>**一、不完全訊息槍手賽局中的不完美最佳策略:**</u>

以上我們假設槍手們知道彼此的命中率及過去行動，然而當槍手們沒有完善資訊時，我們發現槍手們的不完美最佳策略也能從全決策盒中計算出: (假設其餘槍手都有完全訊息，並選擇最佳策略):

1.缺乏槍手們的命中率資訊: 以降低變數數量的方式討論。

例如: 當已知槍手 C 的命中率 $c = p$ 時，取全決策盒與平面: $z = p$ 的截面(將討論限制在已知命中率 c 的情況)。則所占區域面積最大的策略就是槍手的不完美最佳策略，依比例亦可找出混合策略。

2.**缺乏槍手們過去行動的資訊:** 以條件機率的方式進行計算。

例如: 當已知 A 射 B, B 射 A 時，有 $P(\text{C射A}|\text{A射B, B射A}) = \dfrac{P(\text{C射A, A射B, B射A})}{P(\text{A射B, B射A})} = \dfrac{\text{策略(1)所佔體積}}{\text{策略(1),(2),(3)所佔體積和}}$，

所以我們能計算槍手的不同策略成為最佳策略的機率，比較其值後得所求之不完美最佳策略。

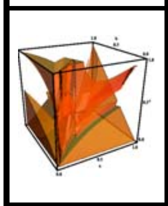
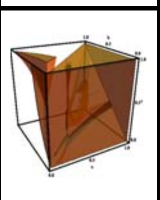
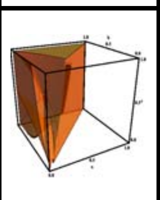
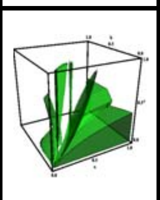
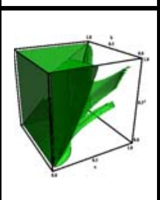
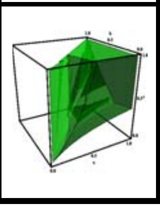
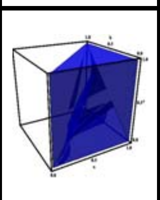
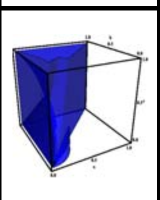
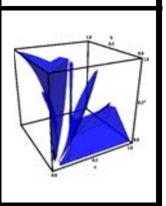
因此，若能建構出全決策盒，則對於不完全訊息賽局，都可以求出槍手的不完美最佳策略。

二、全決策空間在一般化賽局中的應用:

對於任意玩家，若所有變數及過去玩家策略皆為已知(也就是完全訊息賽局)，則藉由全決策空間與最佳策略組合的對應關係，我們能知道每位玩家的最佳策略；而當玩家不知道部分(或全部)變數之值或不知道過去部分(或全部)玩家們的行動，我們也可以找出該玩家的不完美最佳策略。

陸、研究結論

一、本報告完成了兩人及三人槍手賽局的策略分析。將三人槍手賽局的結果整理如下表:

A 射擊 B	A 射擊 C	A 不射擊	B 射擊 A	B 射擊 C	B 不射擊	C 射擊 A	C 射擊 B	C 不射擊
								

二、引進全決策盒的概念後，將三人槍手賽局的結果推演到不完全資訊賽局的策略選擇如下:

1.缺乏所有槍手(含自身)命中率訊息

		槍手 A				槍手 B				槍手 C			
策略訊息公開	第一回合	**A 射 C**				A 射 B 或 A 射 C: **B 射 A** A 不射: **B 射 C**				已知 A,B 策略組合， 同第一回合後之情形			
	第一回合後		C 射 A	C 射 B	C 不射		C 射 A	C 射 B	C 不射		B 射 A	B 射 C	B 不射
		B 射 A	**射 B**	**射 B**	**射 B**	A 射 B	**射 A**	**射 C**	**射 A**	A 射 B	**不射**	**不射**	**射 A**
		B 射 C	**射 C**	**不射**	**射 B**	A 射 C	**不射**	**射 C**	**射 A**	A 射 C	**射 A**	**射 A**	**射 A**
		B 不射	**射 C**	**無**	**無**	A 不射	**射 C**	**射 C**	**無**	A 不射	**無**	**射 B**	**無**
策略訊息不公開		**A 射 C**				**B 射 C**				**C 射 A**			

2.缺乏其他槍手(不含自身) 命中率資訊

		槍手 A				槍手 B				槍手 C			
策略訊息公開	第一回合	(0.00,0.56)- **A 不射** (0.56,1.00)- **A 射 C**				A 射 B	(.00, .17):B 射A (.17, .37):B 射C (.37, .79):B 射A (. 79, 1]:B 射C			已知 A, B 策略組合， 同第一回合後之情形			
						A 射 C	**B 射 C**						
						A 不射	**B 射 C**						
	第一回合後	B \ C	射A	射B	不射	A \ C	射A	射B	不射	A \ B	射A	射C	不射
		射A	(.00, .36):射B (.36, .52):射 C (.52, 1]:射 B	(.00, .50):射B (.50, 1]-射 C	A 射 B	射B	(.00, .38):射C (.38, .79):射 A (.79, 1]:不射	射C	(.00,.42):射A (.42, 1]:射 C	射B	(.00, .24):不射 (.24, 1]:射 A	(.00, .30):射B (.30, .65):射 A (.65, 1]:不射	(.00,.21):不發生 (.21, 1]:射 A
		射C	(.00, .35):射C (.35, .54):射B (.54, 1):射C a=1:不發生	A 不射	(.00, .38):射B (.38, 1]:不發生	射C	(.00, .67):不射 (.67, 1):射C b=1:不發生	(.00, 1):射C b=1:不發生	(.00,.12):射A (.12, 1]:無	射C	(.00, .37):射A (.37, 1]:不射	射A	射A
		不射	射C	不發生	不發生	不射	(.00, .20):不發生 (.20, .33):射C (.33, .35):不發生 (.35, 38):射C (.38, 1]:不發生	射C	不發生	不射	不發生	射B	不發生
策略訊息不公開		$a < 0.56$: **A 不射** $a > 0.56$: **A 射 C**				**B 射 C**				$c < 0.29$: **C 射 B** $c > 0.29$: **C 射 A**			

三、將全決策盒推廣到一般賽局的全決策空間，提供了賽局理論一種新的討論方式，將可同時完成完全信息賽局及不完全信息賽局的分析。

柒、應用及展望

在研究的過程中我們發現：當我們不知道命中率與決策這兩個變因時，我們可以利用「決策盒」的體積概念來解釋三方不完美最佳策略的組合。若已知某一方的命中率則可利用截面概念來尋找其不完美最佳策略。或已知某一方的決策亦可利用條件機率求其不完美最佳策略。近來中東戰爭、物價飆漲常涉及三方或多方的策略互動，以本研究所建構的數學模型，可預測各方策略選擇之結果。

捌、參考資料

一、Len Fisher。剪刀、石頭、布: 生活中的賽局理論。天下文化。2009。

二、Roger A. McCain。Game Theory, a Non-Technical Introduction to the Analysis of Strategy。智勝文化。2008。

三、Bruce Bueno de Mesquita。The Predictioneer′s Game。經濟新潮社。2010。

四、張振華。賽局好好玩。博雅書屋。2009。