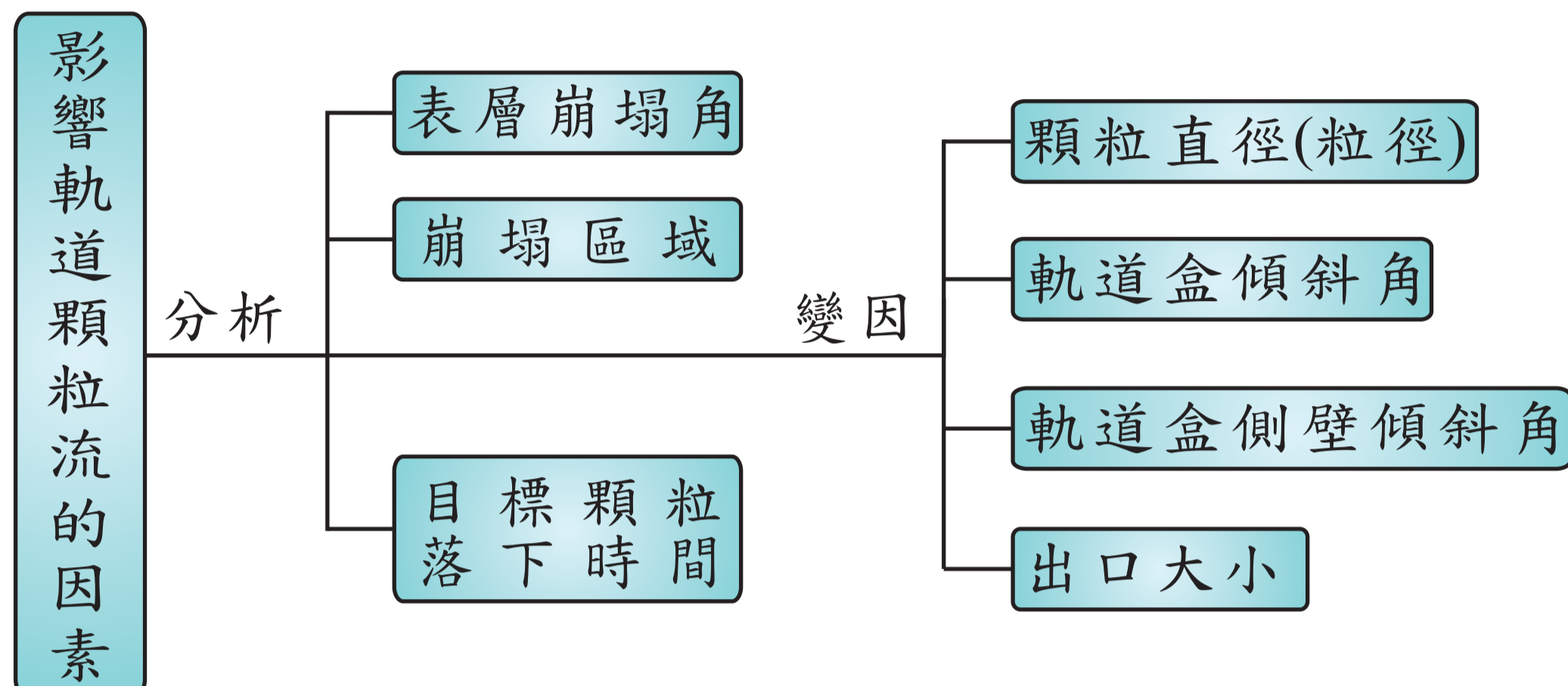


壹、前言

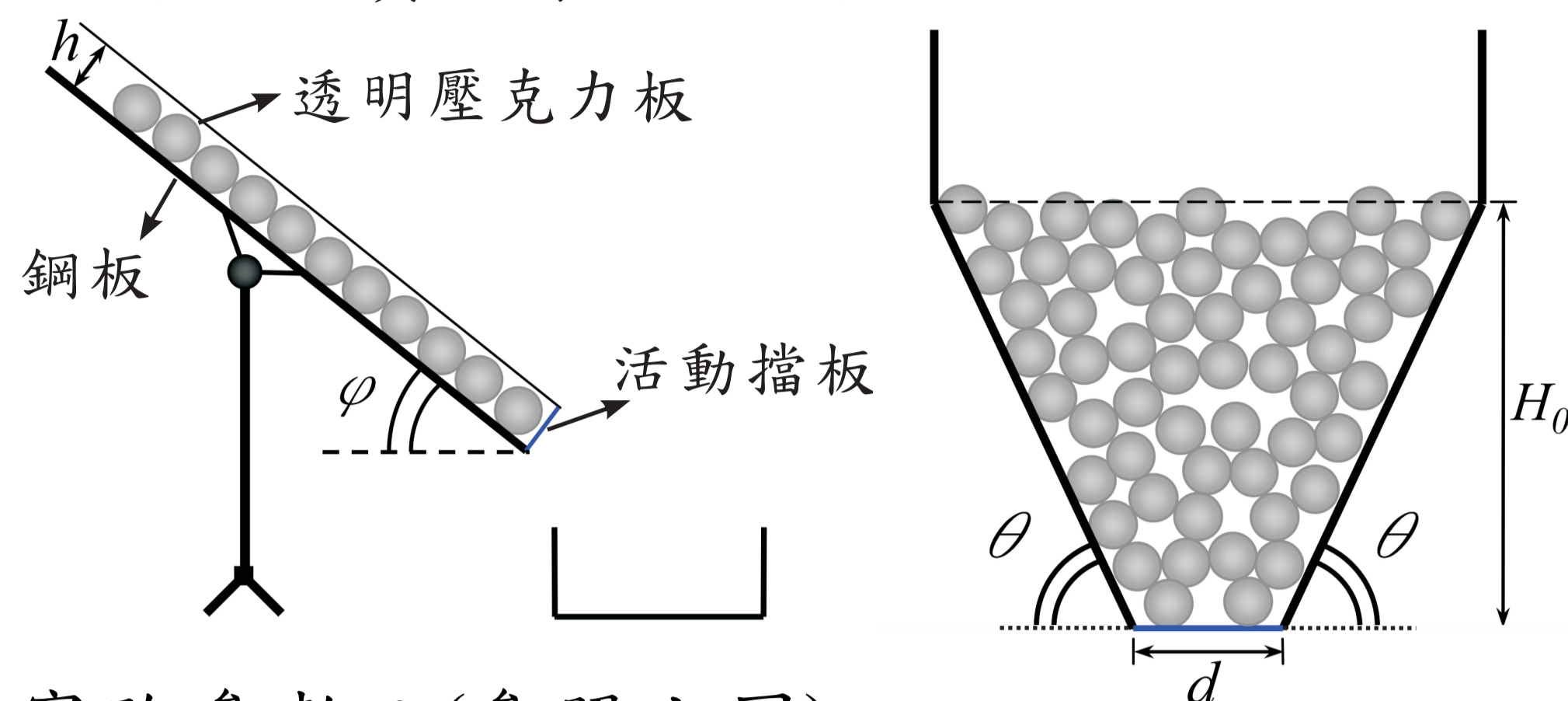
沙漏是古老的計時儀器，其中的沙粒流與水流是截然不同的，每一粒沙都是獨立的，究竟不同位置的砂粒落下所花的時間有何差異呢？為了瞭解沙漏中顆粒體的流動模式，我們從二維斜面顆粒流著手探討，自行設計實驗裝置並進行初步的試驗後，令我們感到驚奇的是：顆粒並沒有遵循最初的排序關係落下(流出軌道盒)，而發生了倒序的有趣現象。本研究探討不同因素對二維斜面顆粒流「崩塌」及「倒序」現象的影響，並深入探討這兩種現象的發生原因。

貳、研究目的及方法

- 本研究主要目的是探討各種變因對二維斜面顆粒流的影響。
- 研究變因包含：顆粒粒徑、軌道盒傾斜角度、軌道盒側壁傾斜角度及軌道盒出口大小。並觀察顆粒流的性質包含：巨觀的顆粒流外形及微觀的目標顆粒落下時間。



- 軌道盒及實驗裝置相片：

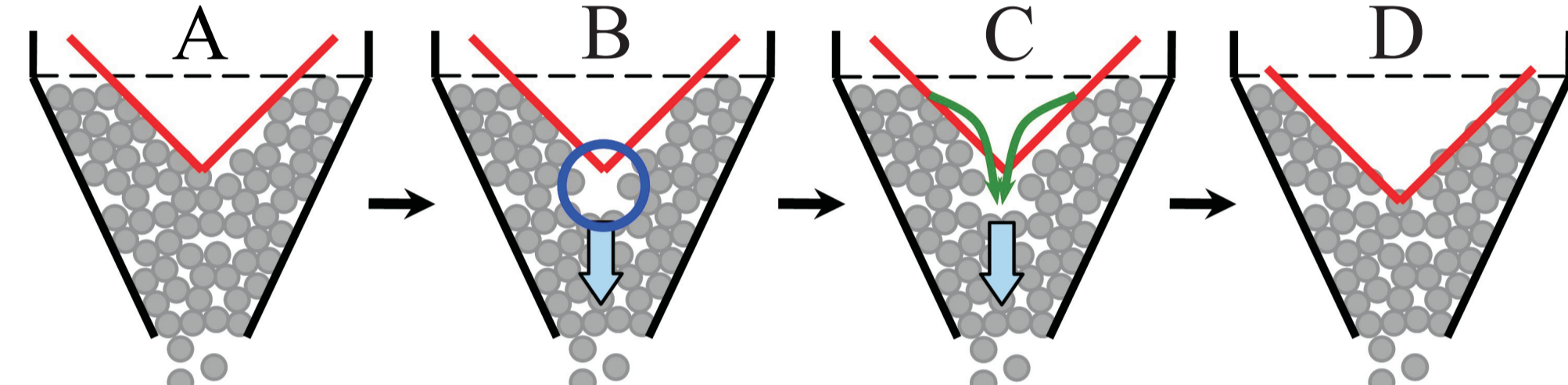
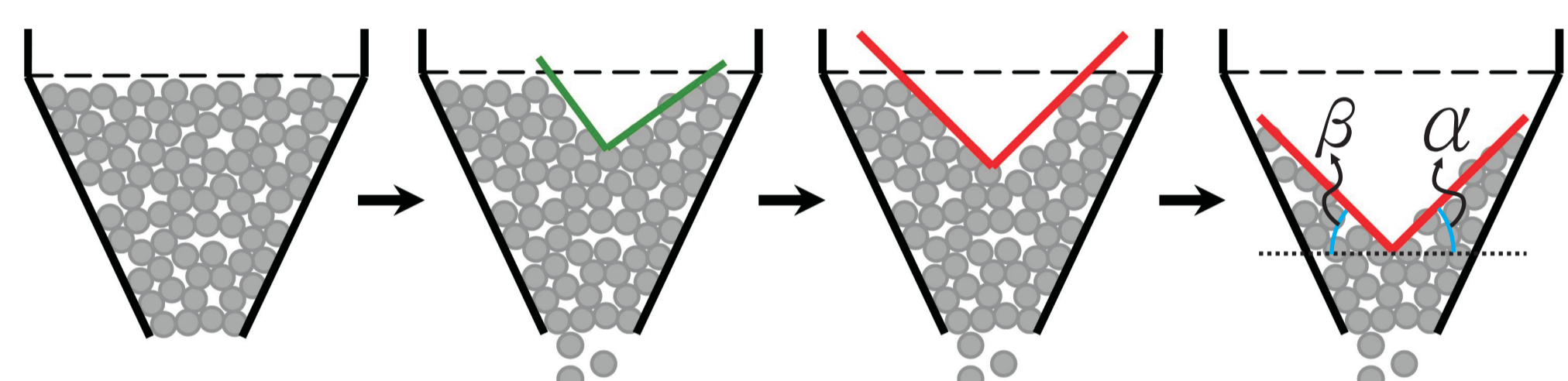


- 實驗參數：(參照上圖)
 1. 顆粒直徑: 0.3, 0.4, 0.5cm
 2. 軌道盒傾斜角 φ : 25°, 37°, 45°
 3. 軌道盒側壁傾斜角 θ : 30°, 45°, 60°
 4. 軌道盒出口大小 d : 2.5, 3.5, 4.5 cm (軌道盒高度 h 設定為顆粒直徑+0.1cm)

參、研究結果及討論

一、影響顆粒流外形的因素

顆粒流外形：「V字下滑」及「表層崩塌」



- 巨觀點「V字下滑」：

頂層顆粒自表層中央處左右開始陷落(位置隨顆粒體排列方式改變)，接著，V字斜邊傾角增加，但停止於某臨界角(稱表層崩塌角($\frac{\alpha+\beta}{2}$))，此後頂層顆粒呈相同張角下降。

- 微觀點「表層崩塌」：

由於顆粒流V字底部快速落下產生空隙(A)，造成傾斜角度過大(B)，上層顆粒自由落下後(C)，越過下方顆粒，發生「表層崩塌」，使V字斜邊回到原先的傾斜角度(D)。

1. 顆粒粒徑對表層崩塌角的影響

表1：顆粒粒徑與表層崩塌角關係表

顆粒粒徑(cm)	平均表層崩塌角
0.3	50.6°
0.4	36.0°
0.5	無表層崩塌現象

- 顆粒粒徑與表層崩塌角呈負向關係。
- 當顆粒粒徑越大時，開始發生表層崩塌的時間點越晚，甚至可能不發生表層崩塌。

2. 軌道盒傾斜角對表層崩塌角的影響

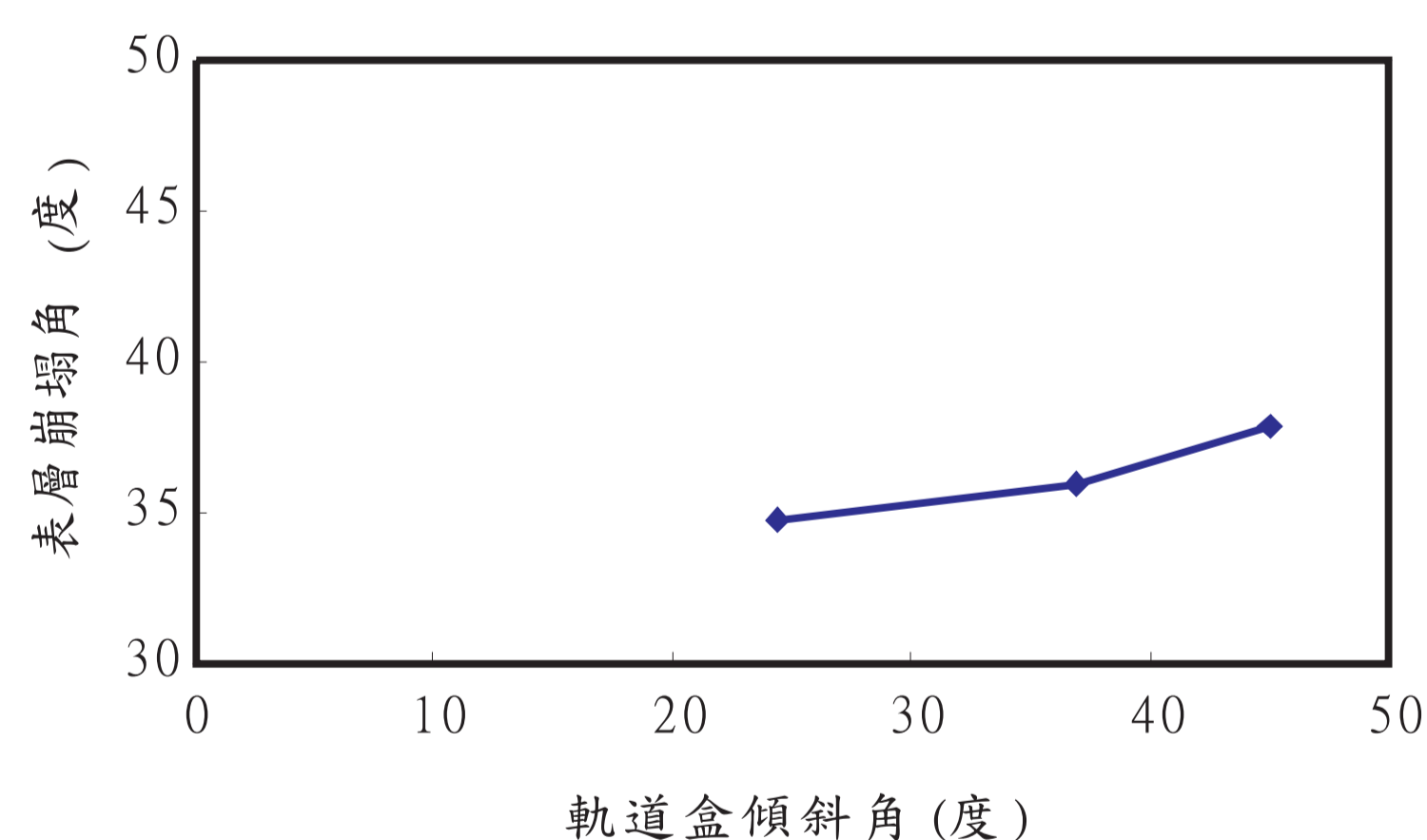
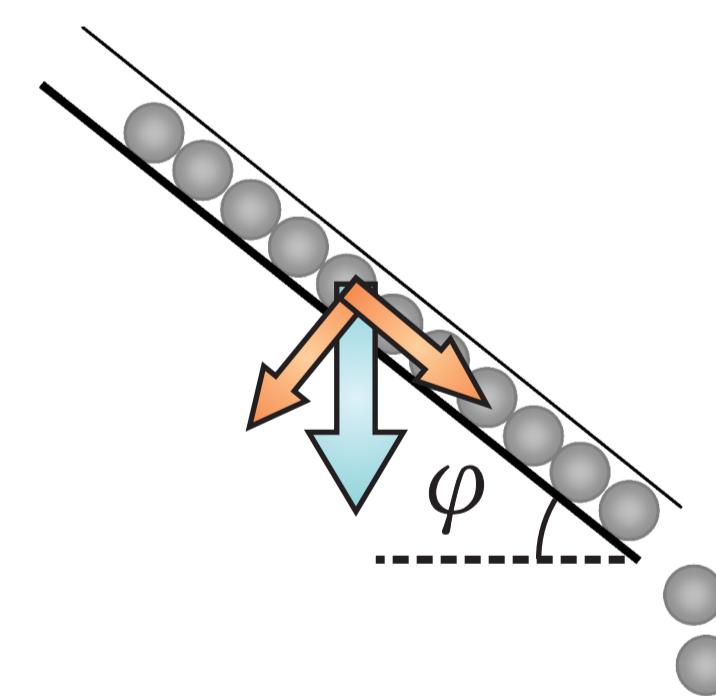


圖1：軌道盒傾斜角與表層崩塌角關係圖

- 軌道盒傾斜角與表層崩塌角呈正向關係。

- 當軌道盒傾斜角度較大時，重力於所有顆粒運動方向上的分力皆增加(如右圖)，且增加比例相同，故中央及兩側顆粒流的流速差亦增加，因此表層崩塌角較大。



3. 軌道盒側壁傾斜角對表層崩塌角的影響

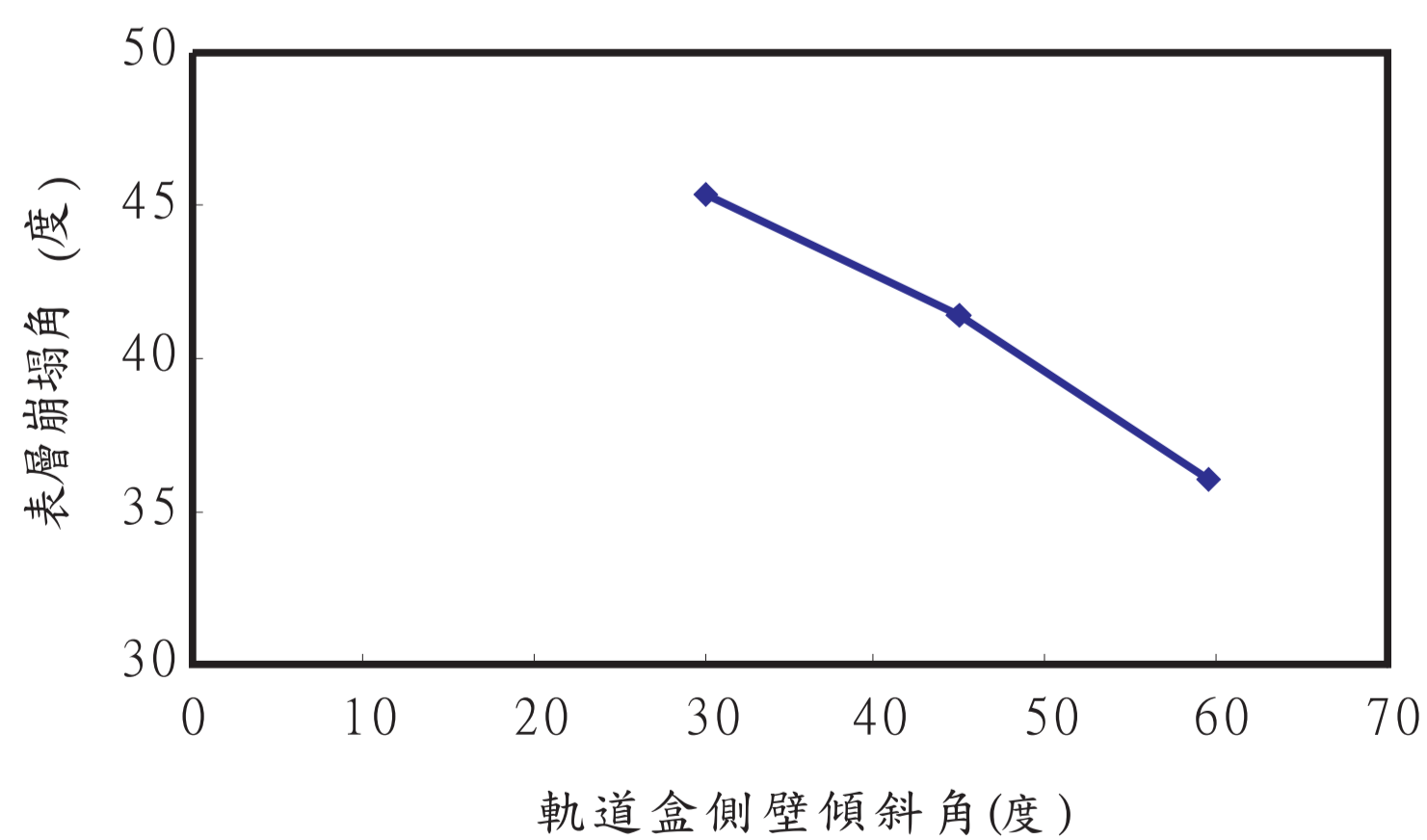
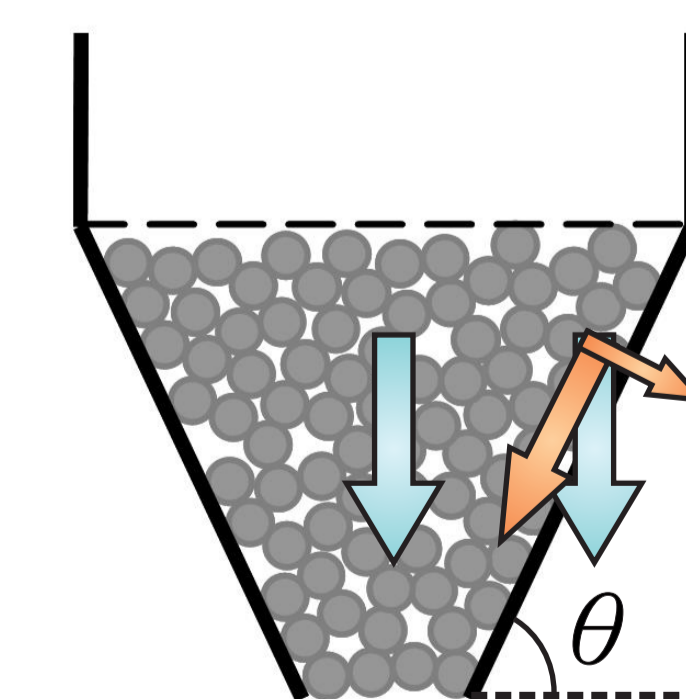


圖2：軌道盒側壁傾斜角與表層崩塌角關係圖

- 軌道盒側壁傾斜角與表層崩塌角呈負向關係。

- 當軌道盒側壁傾斜角越大時，側壁上顆粒運動方向上的分力較小(如右圖)，故中央及兩側顆粒流的流速差較小，因此表層崩塌角較小。



4. 出口大小對表層崩塌角的影響

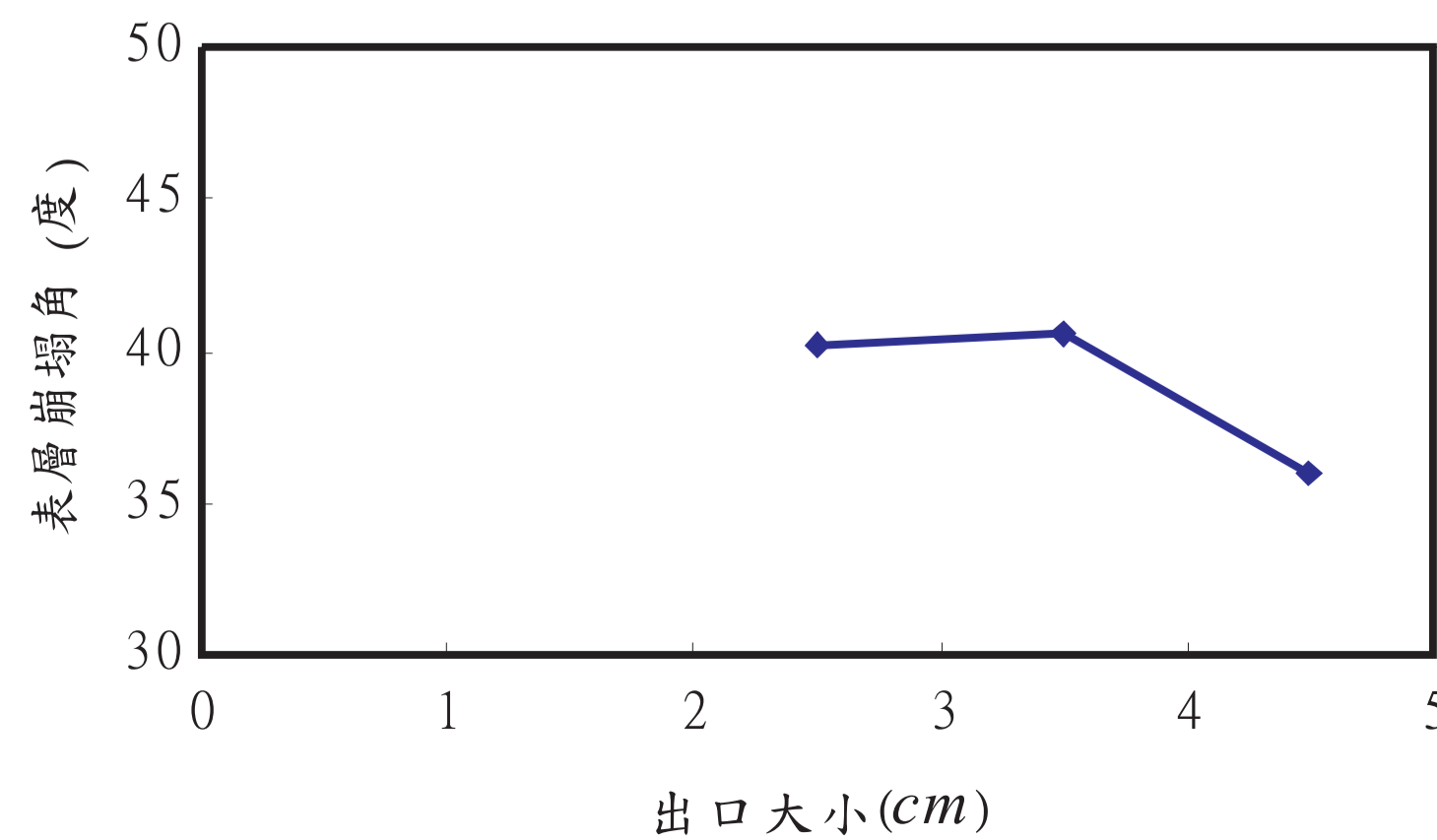


圖3：出口大小與表層崩塌角關係圖

- 出口大小與表層崩塌角未呈現明顯相關關係。
- 由以上實驗得知，不只顆粒的粒徑，軌道盒的形狀與傾斜角都會影響表層崩塌角，這和顆粒體的安息角與滑動角(僅受顆粒的性質影響)截然不同，實在是我們意料之外的現象。

二維顆粒流體崩塌倒序現象之探討

Collapse and Inverted Order of Granular in Two Dimensions

二、影響中軸線上目標顆粒落下時間的因素

1. 顆粒粒徑對中軸線上目標顆粒落下時間的影響

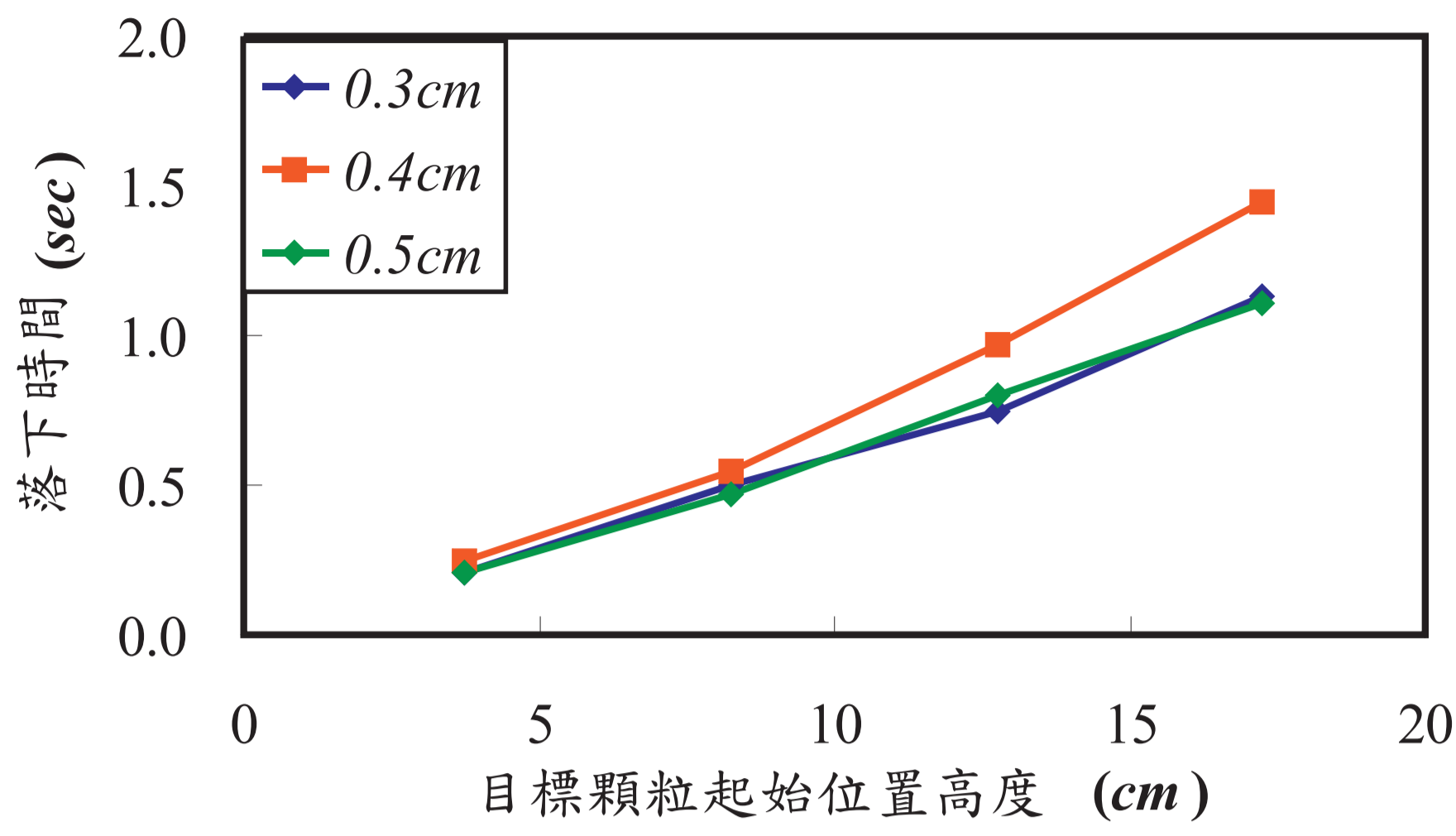


圖4：顆粒粒徑與目標顆粒落下時間關係圖

- 粒徑大小為0.4cm的顆粒，在不同起始高度的顆粒落下時間最長，意即其平均速度最小。

- 我們猜測這樣的結果或許和粒徑與出口大小的比值有關，因為本實驗中出口大小控制為4.5cm，為0.3cm及0.5cm的整數倍，但卻不被0.4cm整除，因此可能造成顆粒流出出口時不順暢，彼此間作用力增加而使流速減慢。

2. 軌道盒傾斜角對中軸線上目標顆粒落下時間的影響

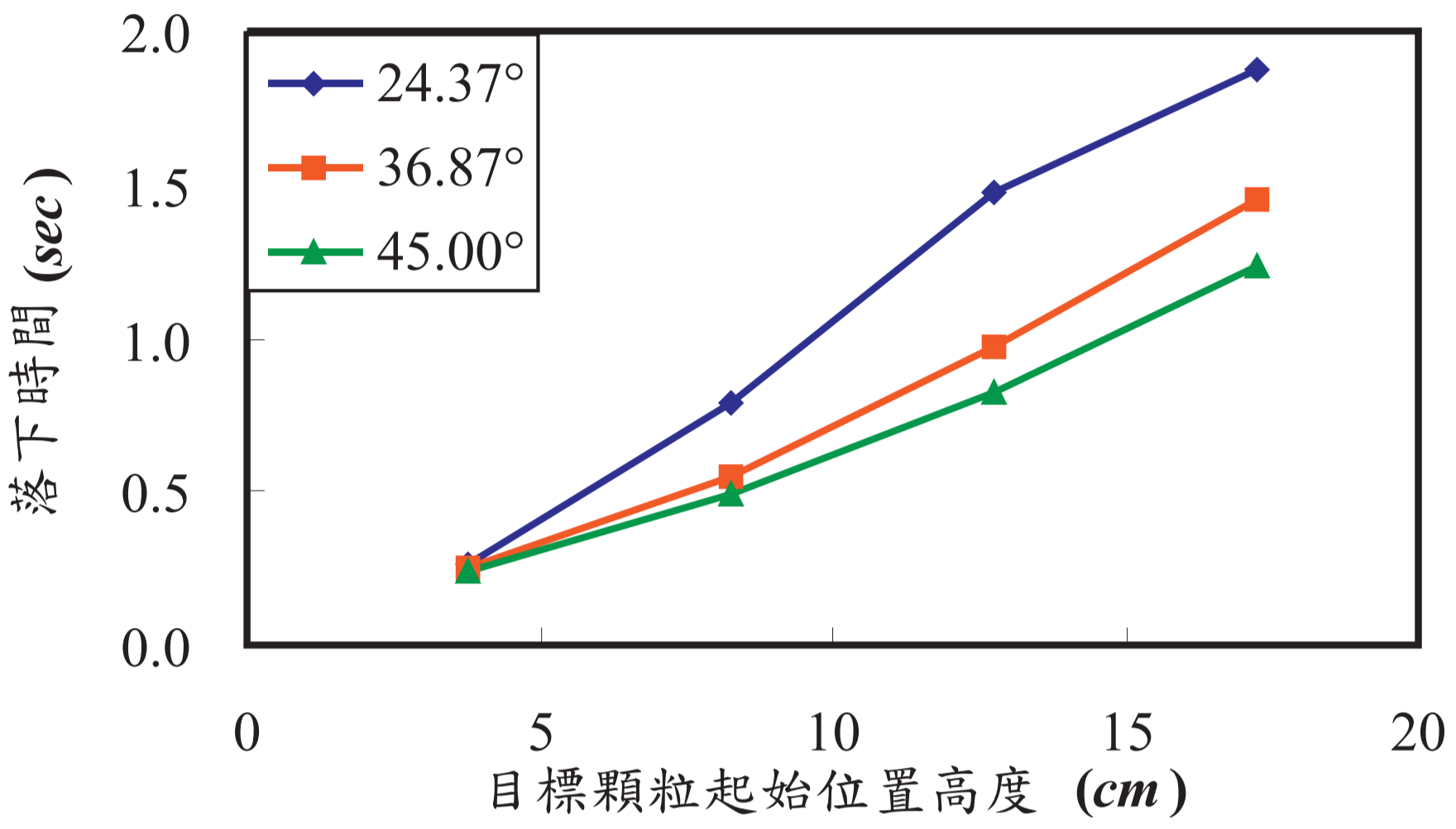


圖5：軌道盒傾斜角與目標顆粒落下時間關係圖

- 當軌道盒傾斜角度增加時，不同起始高度的顆粒的落下時間減少，平均速度增加。

- 因為當軌道盒傾斜角度增加時，重力在顆粒體運動方向上的分力較大，所以顆粒體加速度較大，平均速度較大，落下時間較短。

3. 軌道盒側壁傾斜角對中軸線上目標顆粒落下時間的影響

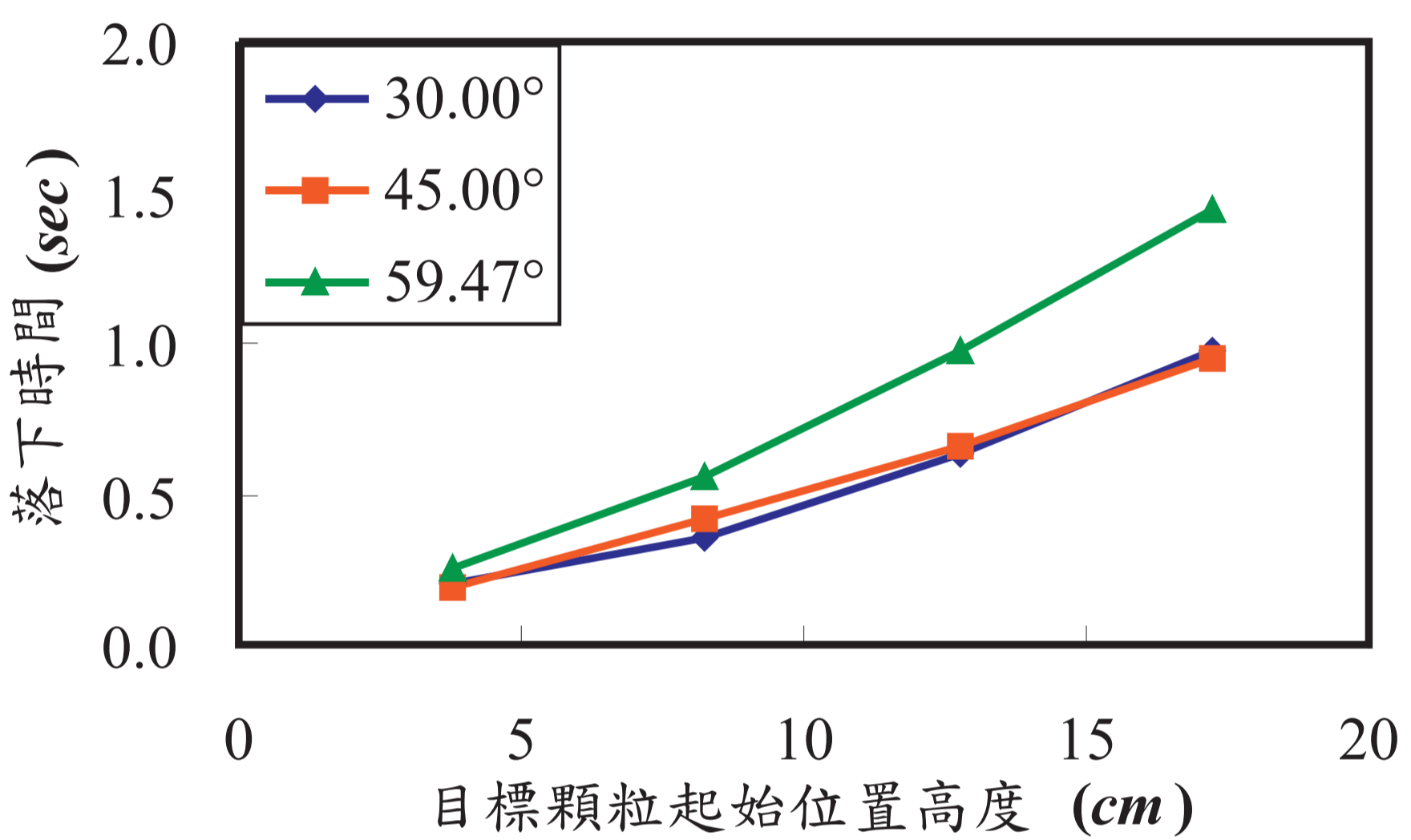


圖6：軌道盒側壁傾斜角與目標顆粒落下時間關係圖

- 當軌道盒側壁傾斜角度增加時，不同起始高度的顆粒的落下時間增加，平均速度降低。

- 當軌道盒側壁傾斜角度增加時，側壁施予側壁上顆粒運動方向上的分力亦增加，阻礙中軸線上目標顆粒落下的程度越大。

- 當 $\theta = 30.00^\circ, 45.00^\circ$ 時，圖形幾乎完全吻合。猜測因為此時中央顆粒的下滑力已足夠抵擋側邊顆粒所施予正向力及摩擦力的影響。

4. 出口大小對中軸線上目標顆粒落下時間的影響

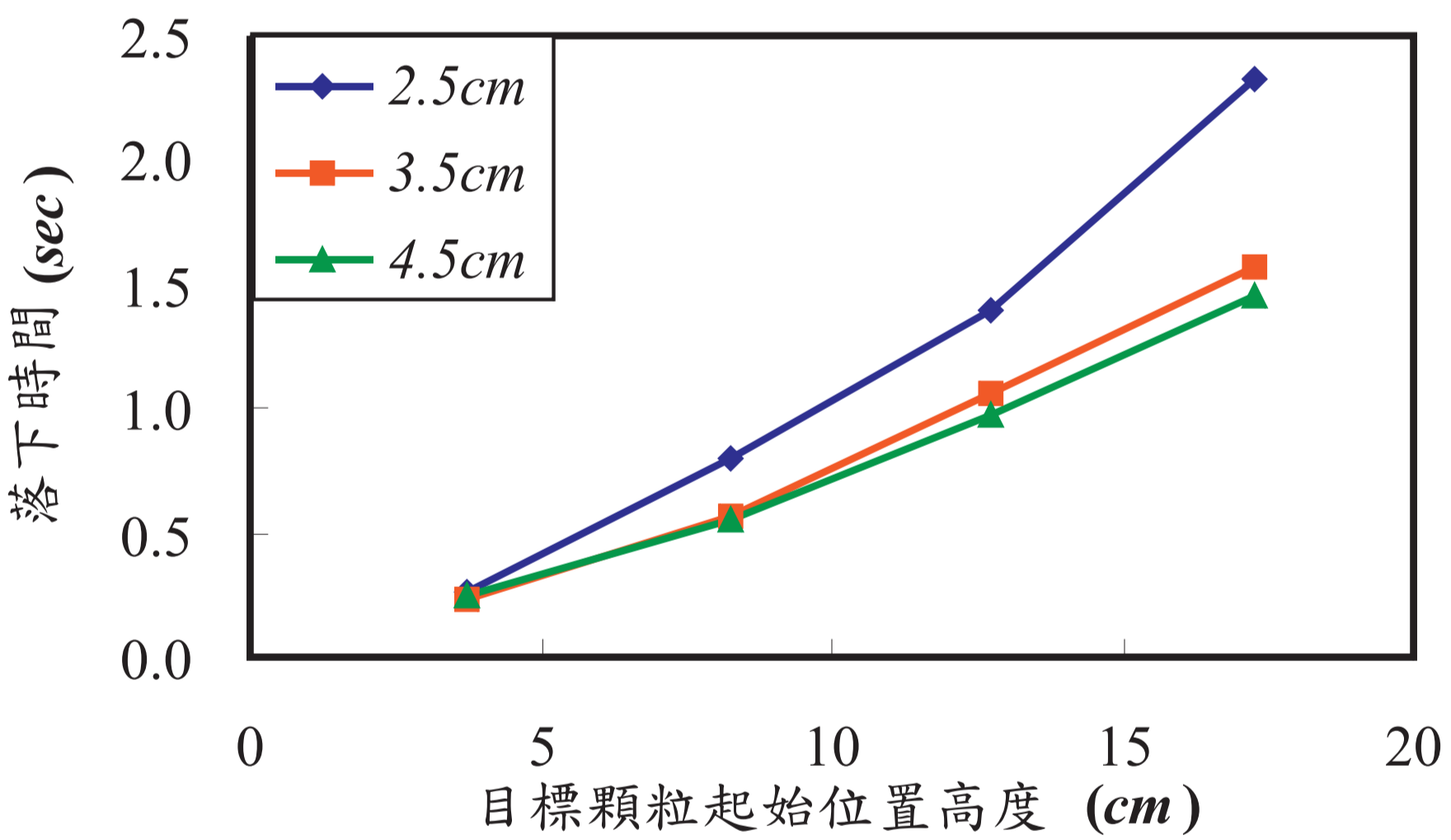


圖7：出口大小與目標顆粒落下時間關係圖

- 當軌道盒出口大小增加時，不同起始高度的顆粒的落下時間減少，平均速度增加。

- 因為出口大小增加，使得顆粒流流量變大，目標顆粒落下的速度亦隨之增加；當出口大小減少時，落下速度變慢。

三、崩塌區域相圖

為了明瞭微觀下顆粒流的流動情形，我們接著研究顆粒在不同起始位置的落下時間變化。我們在軌道盒上建立座標系，將目標顆粒置放於各個格點上，量測其落下時間(如下圖)：

1. 目標顆粒起始位置對目標顆粒落下時間的影響

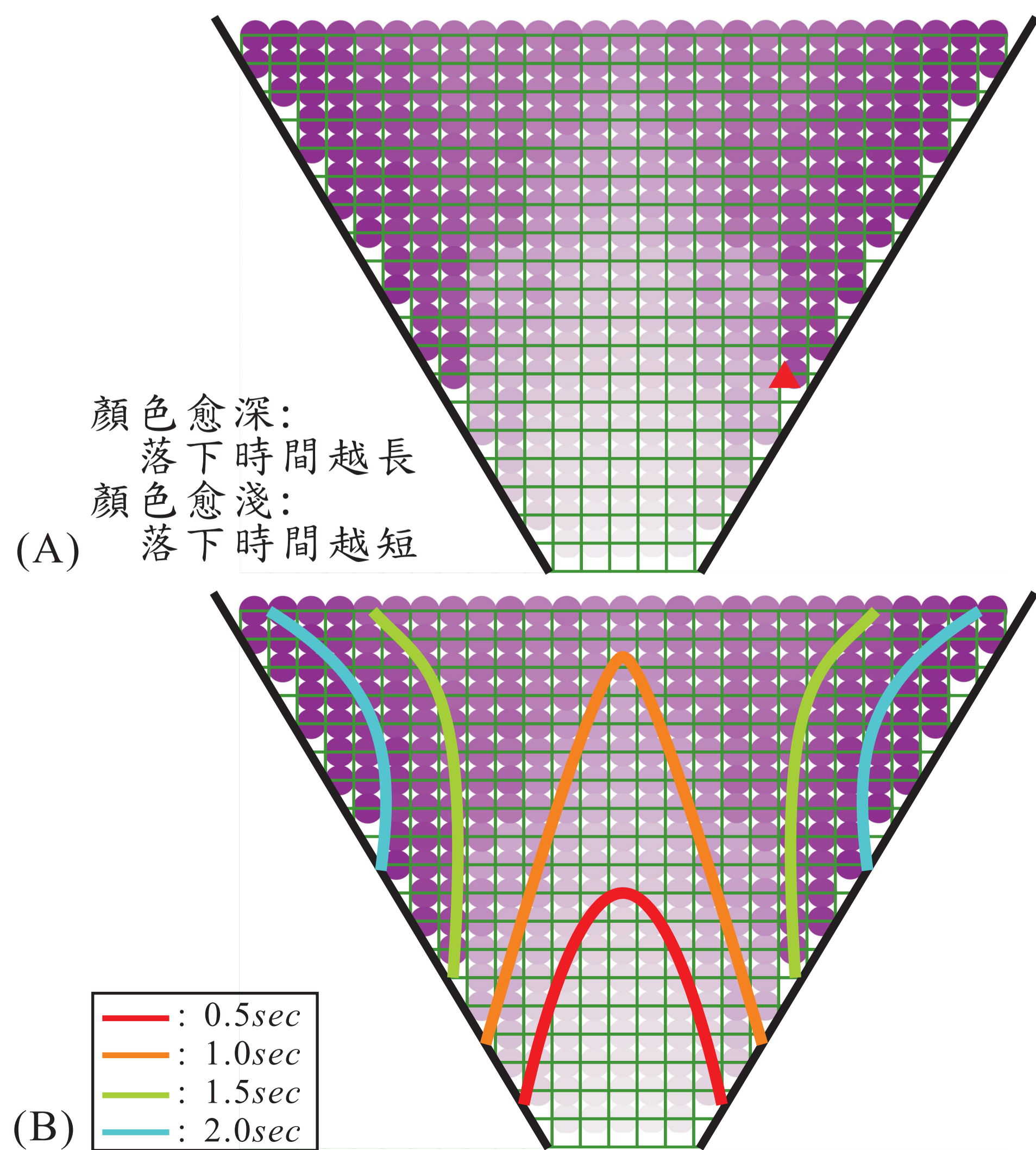


圖8：目標顆粒起始位置與落下時間的色階圖(A)(B)

- 當顆粒起始位置位於開口正上方時(此顆粒群稱中央自由流($x=0, 1, 2$)):

顆粒起始高度與落下時間呈正向線性關係。因為開口處的顆粒會先落下，且較高處顆粒須移動較長的距離。

- 當顆粒起始位置較遠離中軸線時($x=3, 4, 5$):

當顆粒起始高度較低時，顆粒起始高度與落下時間呈正向關係；當顆粒起始高度較高時，顆粒起始高度與落下時間呈負向關係。

- 當顆粒起始位置較遠離中軸線時($x=6, \dots, 13$):

顆粒起始高度與落下時間呈負向關係，出現「起始高度較高的顆粒落下時間卻較短」的「倒序」現象。

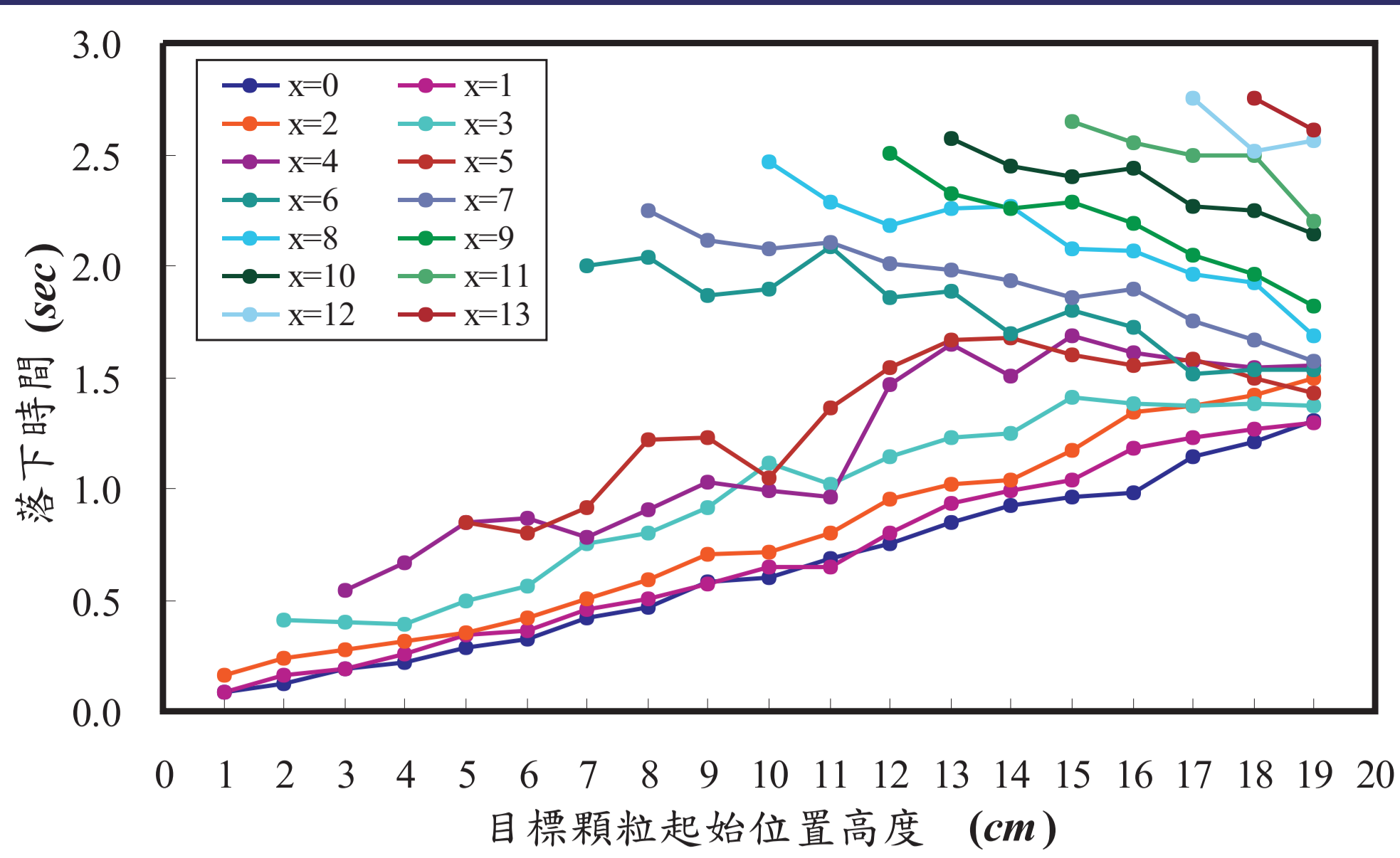


圖9：顆粒起始位置高度與目標顆粒落下時間關係圖

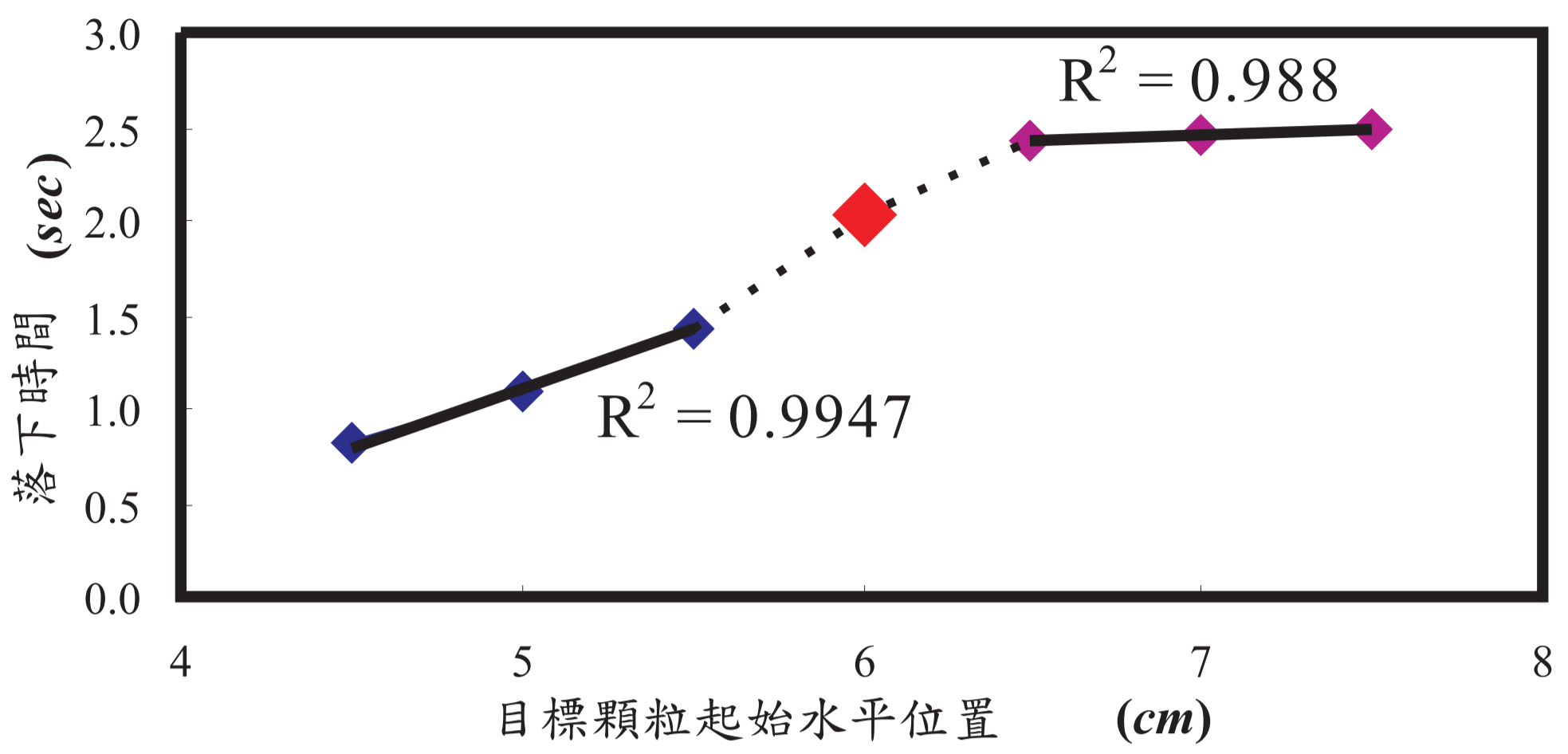


圖10：顆粒起始水平位置與目標顆粒落下時間關係圖

- 較高處的顆粒會先發生表層崩塌而進入V字底部，並隨顆粒流流出；較低處的顆粒較晚發生表層崩塌，故較晚落到V字底部。

- 側壁上顆粒不易發生表層崩塌且流速較慢。

- 如上頁圖8(A)，側壁上的顆粒在圖中標記處(三角形標記)出現明顯的跳躍式增加。

- 當顆粒漸漸遠離中軸線時，落下時間在距離6cm中軸線時出現跳躍式的增加。

- 因為內部流與側壁流在此匯集，造成此位置以上之顆粒的落下時間特別長。

2. 崩塌區域相圖

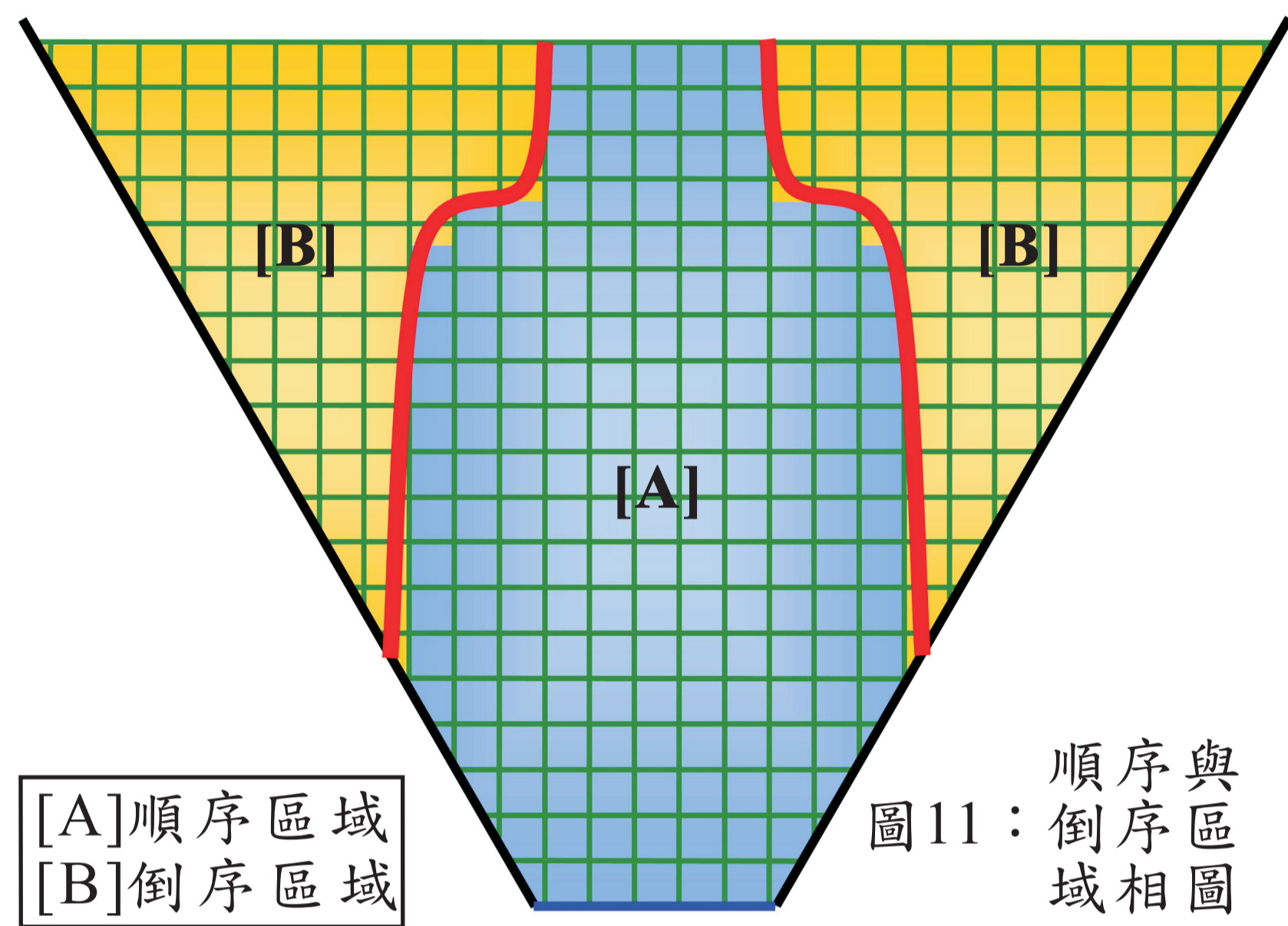


圖11：順序與倒序區域相圖

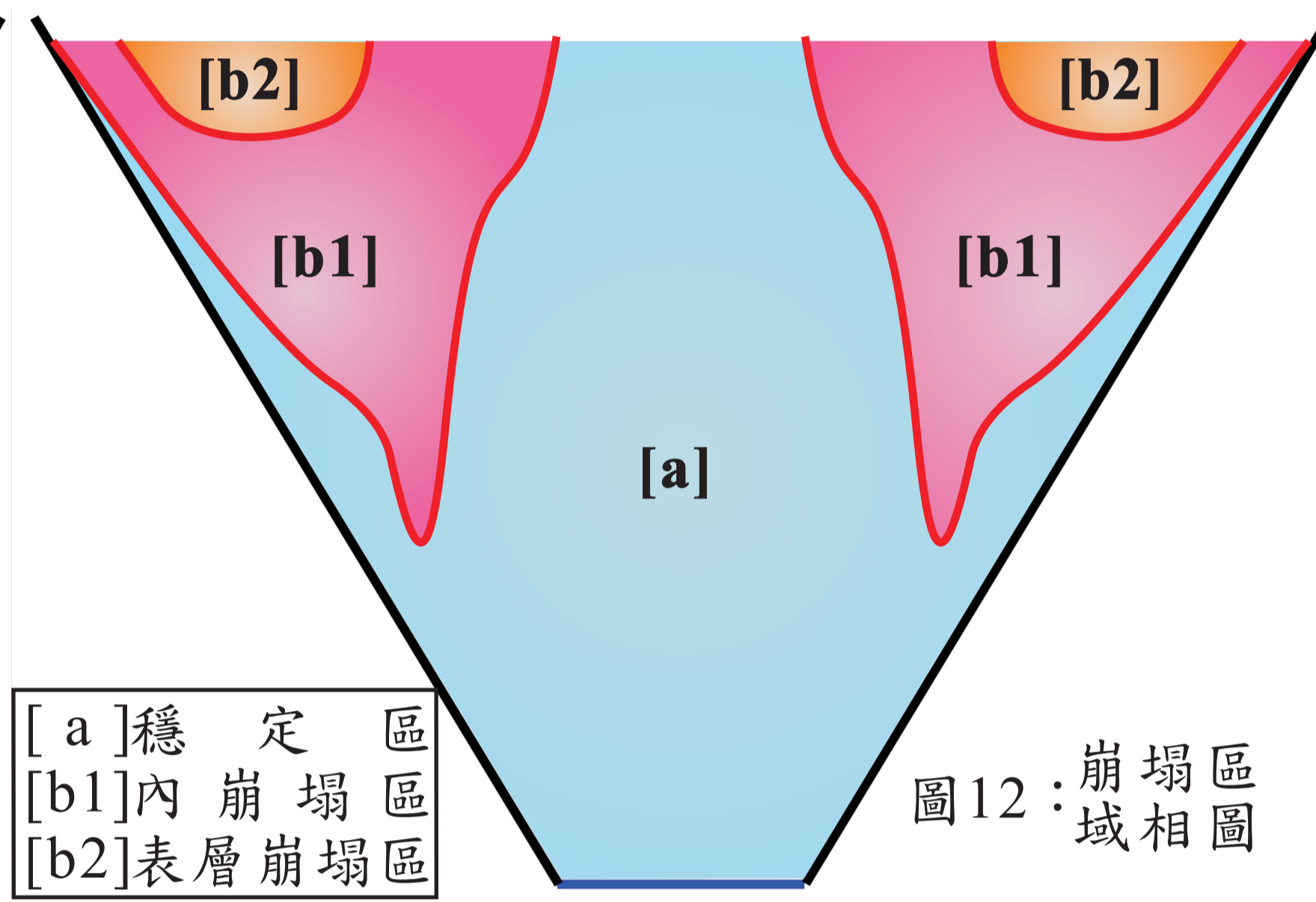


圖12：崩塌區域相圖

- 左圖展現顆粒落下時間呈現順序或倒序關係的區域；右圖呈現「崩塌現象」發生的區域。

- 穩定區恰好對應到順序區域；表層崩塌區及內崩塌區對應到倒序區域，因為崩塌是導致倒序現象發生的原因。

四、影響崩塌區域位置的因素

1. 顆粒粒徑對崩塌區域位置的影響

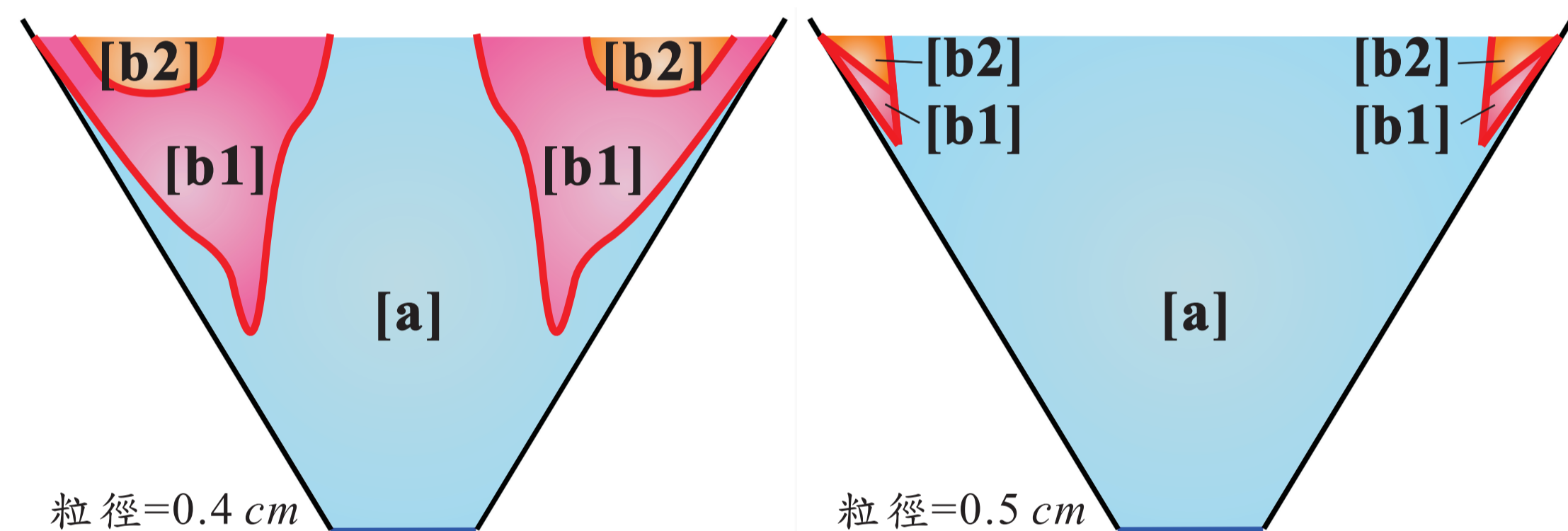


圖13：不同顆粒粒徑時的崩塌區域相圖

- 當顆粒粒徑為0.4cm時：當顆粒起始位置從中軸線向兩側移動時，將從順序關係漸漸轉換成倒序關係。

- 當顆粒粒徑為0.5cm時：因為多數顆粒未發生崩塌，故穩定流的區域較大。而在側壁流最上方處有時會發生內崩塌與表層崩塌，造成倒序的現象。

2. 軌道盒側壁傾斜角對崩塌區域位置的影響

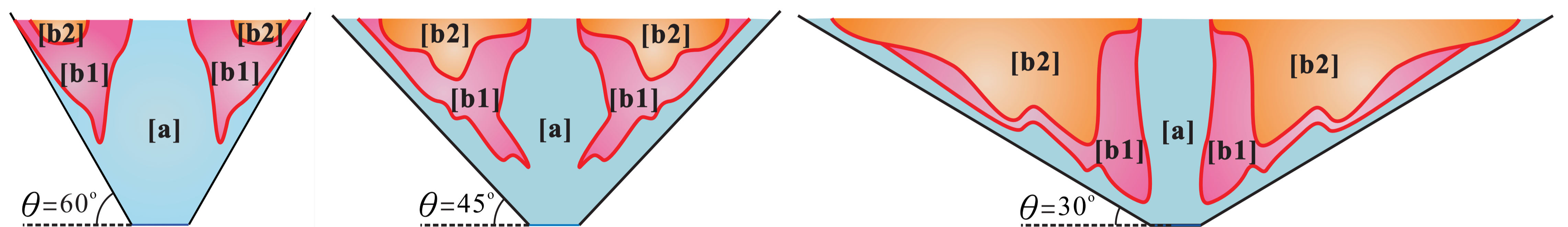


圖14：不同軌道盒側壁傾斜角度時的崩塌區域相圖

- 當軌道盒側壁傾斜角減少時：

- (1)中央的穩定區逐漸縮小；開口正上方與側壁上顆粒不發生崩塌的現象，且越靠近開口處側壁部分的穩定區逐漸加寬。
- (2)表層崩塌區面積增加許多，並逐漸侵入內崩塌區中；表層崩塌區與內崩塌區的邊界漸漸下移、加寬，注意到最後表層崩塌完全取代內崩塌區頂層的部分。
- (3)中央穩定區與崩塌區的邊界上部寬度不變，而靠近開口處的內崩塌區最低邊界逐漸向開口移動，接著中央穩定區才向內縮。

- 導致崩塌區域呈現以上變化的原因是：重力作用在側壁上顆粒運動方向上的分力較小，導致中央顆粒流出數量較多，故附近顆粒較容易發生崩塌，才能維持相同的表層崩塌角。

肆、研究結論

- 表層崩塌角與目標顆粒落下時間受顆粒粒徑與軌道盒傾斜角、側壁傾斜角及開口大小影響。
- 起始位置較高且較遠離中軸線的顆粒將可能發生「起始位置較高的顆粒卻較早落下」的倒序現象；依照顆粒實際發生的崩塌類型，能將軌道盒分為穩定區、內崩塌區及表層崩塌區。
- 崩塌區域的分佈受顆粒粒徑與軌道盒側壁傾斜角影響。

伍、參考資料

[1] 葉哲嘉、林中冠(2009)。顆粒體對流現象之探討。2009年臺灣國際科學展覽會
 [2] 鐘杰、彭政、吳耀宇、史慶藩、陸坤權、厚美瑛(2006)。二維顆粒流從稀疏態到密集態的臨界轉變。物理學報。Vol. 55, No. 12。P.729
 [3] T. Nguyen, C. Brennen, R. Sabersky(1980)。Funnel Flow in Hoppers。Journal of Applied Mechanics。Vol. 47, Issue 4。P.6691